## سلاسل المنجد في العلوم الفيزيائية – ثالثة ثانوي – الوحدة 03

# دراسة ظواهر كهربائية

إعداد الأستاذ فرقاني فارس
ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم - الخروب - قسنطينة
www.sites.google.com/site/faresfergani

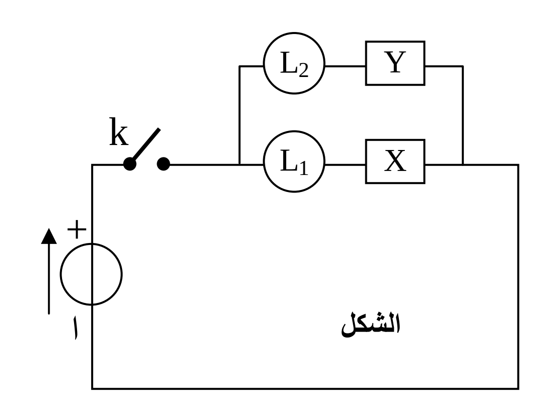
*************************************************************************

## المحتوى المفاهيمي : 04

## تمارين متنوعة

**التمرين (1) :** ( التمرين : 081 في بنك التمارين على الموقع ) (**)

قدم أستاذ في حصة الأعمال المخبرية لفوج من التلاميذ علبتين مغلقتين و متماثلتين X و Y تحتوي إحداهما على مكثفة فارغة و الثانية على وشيعة مقاومتها مهملة و هذا من أجل معرفة طبيعة ثنائي القطب الذي تحتويه كل علبة .




1- قام أعضاء الفوج بتركيب الدارة الكهربائية (الشكل) ، عند غلق القاطعة لاحظوا :
- اشتعال المصباح $L_1$ .
- اشتعال المصباح $L_2$ لوقت قصير ثم انطفأ .

أ- اعتمادا على الملاحظات السابقة ، ما هو ثنائي القطب الذي تحتويه كل علبة مع التعليل .
ب- قام أحد التلاميذ باستبدال كل مصباح بمقياس أمبير ذو مؤشر . صف بدقة كيف ينحرف كل مؤشر بعد غلق القاطعة مباشرة .

2- قام تلميذ ثالث بتركيب مقياس فولط فولط ذو مؤشر على التفرع مع كل علبة . صف بدقة كيف ينحرف كل مؤشر بعد غلق القاطعة .

**الأجوبة :**

1- أ- ثنائي القطب الذي تحتويه كل علبة :

اشتعال المصباح $L_2$ لوقت قصير ثم انطفاءه يدل على أن ثنائي القطب الموجود بالعلبة Y هو عبارة عن مكثفة ، في حين أن ثنائي القطب الموجود بالعلبة X هو عبارة عن وشيعة ، لأن السبب في انقطاع التيار الكهربائي بعد فترة وجيزة في الفرع الذي يحتوي على المكثفة هو العازل الموجود بين لبوسي المكثفة .

ب- كيفية انحراف كل مؤشر في مقياسي الأمبير :

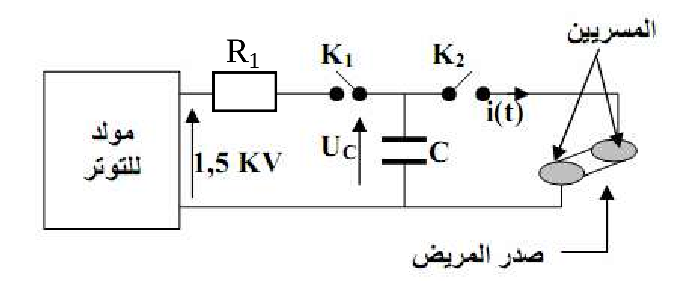
- مقياس الأمبير الموصول على التسلسل مع المكثفة ، ينحرف مؤشره آنيا إلى قيمة أعظمية ثم يعود تدريجيا إلى الصفر .
- مقياس الأمبير الموصول على التسلسل مع الوشيعة ينحرف مؤشره تدريجيا من الصفر إلى أعظم غاية بلوغ قيمة أعظمية يثبت عندها .

2- كيفية انحراف كل مؤشر في مقياسي الفولط :

- مقياس الفولط الموصول على التفرع مع المكثفة ينحرف مؤشره تدريجيا إلى من الصفر إلى غاية بلوغ قيمة أعظمية يثبت عندها .
- مقياس الفولط الموصول على التفرع مع الوشيعة ، ينحرف مؤشره آنيا إلى قيمة أعظمية ثم يعود تدريجيا إلى الصفر .

**التمرين (2) :** ( التمرين : 027 في بنك التمارين على الموقع ) (**)

يمثل جهاز الصدمات القلبية الذي يستعمل في الحالات الطبية الاستعجالية بالشكل المبسط التالي :

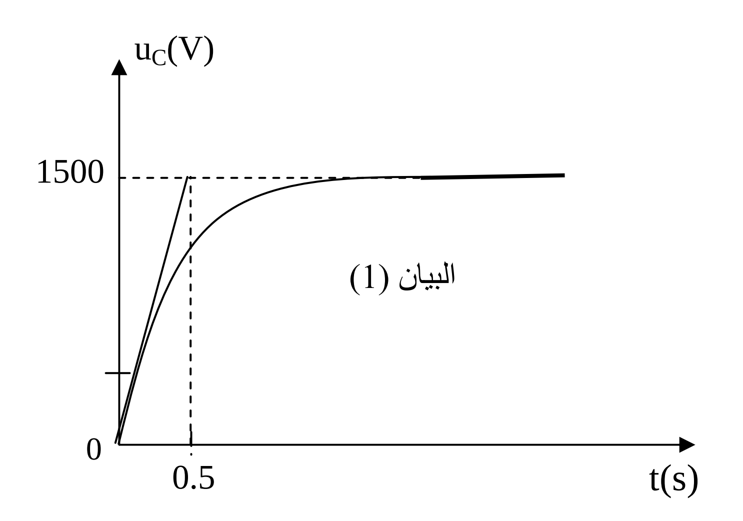


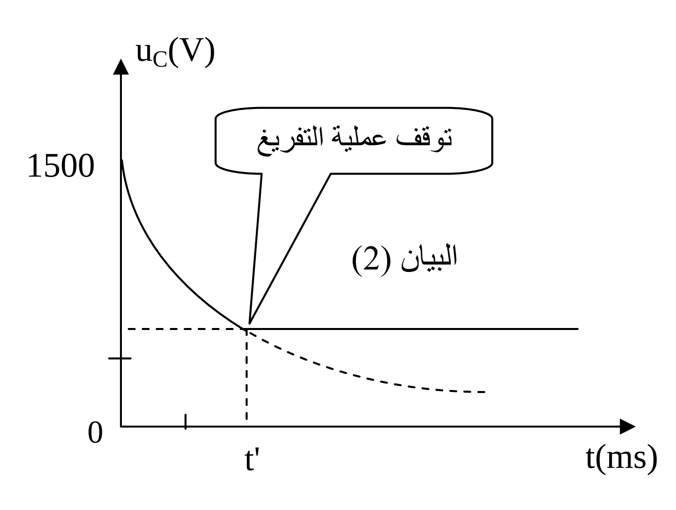

- مولد التوتر ذو قوة محركة كهربائية $E = 1500\ V$ .
- مكثفة سعتها $C = 470\ \mu f$ .
- ناقل أومي مقاومته $R_1$ .
- صدر المريض نعتبره ناقل أومي (دارة التفريغ) مقاومته $R' = 50\ \Omega$

1- نشغل الجهاز بغلق القاطعة $K_1$ ($K_2$ مفتوحة) فتشحن المكثفة C . منحني البيانين (1) ، (2) يمثلان تغيرات التوتر $u_C$ بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن عند الشحن و التفريغ على الترتيب .

أ- اعتمادا على منحنى البيان (1) ، حدد قيمتي ثابت الزمن $\tau$ و مقاومة الناقل الأومي $R_1$ .

ب- أحسب الطاقة الأعظمية المخزنة في المكثفة .




2- في اللحظة $t = 0$ تغلق القاطعة $K_2$ ($K_1$ مفتوحة) فتفرغ المكثفة شحنتها بإرسال صدمات كهربائية عند وضع المسريين على صدر المريض بحيث تتوقف عملية التفريغ بمجرد استهلاك الطاقة اللازمة للجهاز و المقدرة بـ 400 joule .

أ- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة $u_C$ التوتر بين طرفي المكثفة في دارة التفريغ (صدر المريض) .

ب- أثبت أن المعادلة $u_C(t) = E\,e^{-t/R'C}$ هي حل للمعادلة التفاضلية .

جـ- أحسب : ثابت الزمن $\tau'$ ، شدة التيار الأعظمية $I_0$ أثناء تفريغ المكثفة .

د- أكتب عبارة الطاقة $E'_{(C)}$ التي تحررها المكثفة و التي تقدمها للجهاز بدلالة $E_{(C)0}$ ، C ، $u_C(t)$ .

هـ- أوجد قيمة التوتر $u_C'$ بين طرفي المكثفة لحظة توقف عملية التفريغ و ما هي قيمة اللحظة $t'$ الموافقة .

## الأجوبة :

1- أ- قيمة ثابت الزمن $\tau$ ، R :

• من البيان(1) مباشرة و من خلال تقاطع المماس عند اللحظة $t = 0$ مع محور الأزمنة يكون : $\tau = 0.5\ s$

$$\bullet\ \tau = R_1C \rightarrow R_1 = \frac{\tau}{C} \rightarrow R_1 = \frac{0.5}{470.10^{-6}} = 1063.8\,\Omega$$

ب- الطاقة الأعظمية :

$$E_{(C)_0} = \frac{1}{2}CE^2 \rightarrow E_{(C)_0} = \frac{1}{2}.470.10^{-6}(1500)^2 = 528.75\,J$$

2-أ- المعادلة التفاضلية بدلالة $u_C$ :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = 0$$

$$Ri + u_C = 0 \rightarrow R\frac{dq}{dt} + u_C = 0 \rightarrow R\frac{d(Cu_C)}{dt} + u_C = 0$$

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \rightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = 0$$

ب- التحقق من الحل :

- $u_C = Ee^{-t/R'C}$
- $\frac{du_C}{dt} = -\frac{E}{R'C}e^{-t/R'C}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$-\frac{E}{R'C}e^{-t/R'C}+\frac{E}{R'C}e^{-t/R'C}=0 \rightarrow 0=0$$

إذن الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية .

جـ - قيمتي $\tau'$ ، $I_0$ :

- $\tau' = R'C = 50 . 470 . 10^{-6} = 2.35 . 10^{-2}$ s
- $I_0 = \frac{E}{R'} = \frac{1500}{50} = 30$ A

د- عبارة الطاقة التي تحررها المكثفة باتجاه الجهاز :

عند اللحظة $t = 0$ (بداية التفريغ) تكون طاقة المكثفة أعظمية $E_{(C)0}$ و عند اللحظة t تكون طاقة المكثفة $E_{(C)} = \frac{1}{2}C u_C^2$ و منه فالطاقة $E'_{(C)}$ التي تحررها المكثفة للجهاز تمثل الفرق بين الطاقتين يعبر عنها بالعلاقة :

$$E'_{(C)} = E_{(C)0} - \frac{1}{2}C u_C^2$$

هـ- قيمة $u_C'$ لحظة توقف عملية التفريغ :

- عند توقف عملية التفريغ تقدم المكثفة الطاقة اللازمة للجهاز و المقدرة بـ $E'_{(C)} = 400$ J .
- باعتماد على العبارة السابقة يكون :

$$E'_{(C)} = E_{(C)0} - \frac{1}{2}C u_C^2$$

$$\frac{1}{2}C.u_C^2 = E_{(C)0} - E_{(C)} \rightarrow u_C = \sqrt{\frac{2\,(E_{(C)0} - E_{(C)})}{C}}$$

$$\rightarrow u_C = \sqrt{\frac{2\,(528.75 - 400)}{470.10^{-6}}} = 740.18\,V$$

- اللحظة $t'$ عند توقف عملية التفريغ :

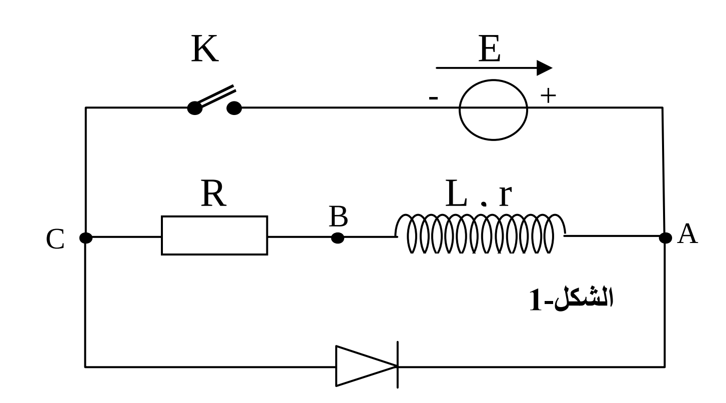
اعتمادا على ما سبق :

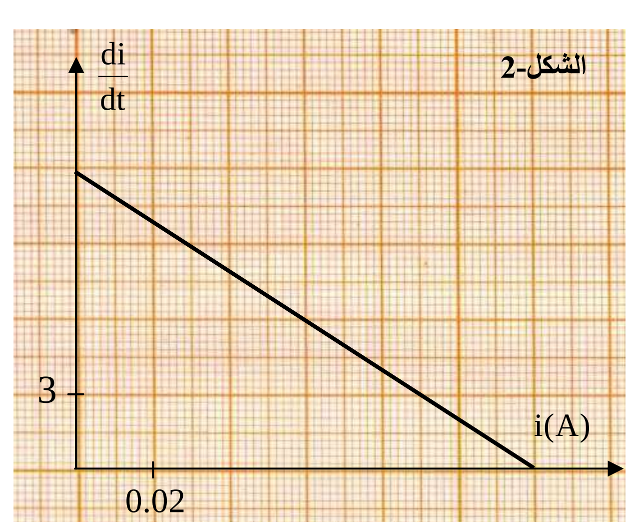
$$u_C = E\,e^{-t/R'C} \rightarrow e^{-t/R'C} = \frac{u_C'}{E} \rightarrow -\frac{t'}{R'C} = \ln(\frac{u_C'}{E}) \rightarrow t' = -R'C\ln(\frac{u_C'}{E'})$$

$$t' = -50.470.10^{-6}\ln(\frac{740.18}{1500}) = 1.66 . 10^{-2}\ s = 16.6\ ms .$$

**التمرين (3) :** ( التمرين : 021 في بنك التمارين على الموقع ) (**)

بواسطة مولد توتر ثابت قوته المحركة الكهربائية E ، ناقل أومي مقاومته $R = 90\ \Omega$ ، وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية r (غير مهملة) ، قاطعة K نحقق الدارة المبينة في (الشكل-1) ثم نغلق القاطعة عند اللحظة $t = 0$ .




1- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة $i(t)$ ، $\frac{d\,i(t)}{dt}$ ، $\tau$ ، $I_0$ فقط .

2- أثبت أن $i(t) = I_0\,(1 - e^{-t/\tau})$ هو حل لهذه المعادلة التفاضلية .

3- الدراسة التجريبية لتغيرات $\frac{d\,i(t)}{dt}$ بدلالة شدة التيار اللحظية $i(t)$ أعطت بيان (الشكل-2) .

- اعتمادا على هذا البيان و المعادلة التفاضلية أوجد قيمتي $\tau$ و $I_0$ ، علما أن $\tau$ يقدر بالثانية .

4- إذا علمت أن طاقة الوشيعة عند النظام الدائم مساوية لـ $E_{(L)0} = 7.2.\ 10^{-3}$ j أوجد قيم : L ، r ، E .

**<u>الأجوبة :</u>**

<u>1- المعادلة التفاضلية :</u>

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{AB} + u_{BC} = u_{AC} \rightarrow u_b + u_R = E \rightarrow L\frac{di}{dt} + r\,i + R\,i = E \quad \rightarrow L\frac{di}{dt} + (R + r)\,i = E$$

بالقسمة على (R+r) :

$$\frac{L}{R + r}\frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R + r}$$

و حيث أن : $\tau = \frac{L}{R + r}$ ، $I_0 = \frac{E}{R + r}$ يصبح :

$$\tau\frac{di}{dt} + i = I_0$$

بقسمة الطرفين على $\tau$ :

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = \frac{I_0}{\tau}$$

<u>2- إثبات أن $i = I_0\,(1 - e^{-t/\tau})$ هو حل للمعادلة التفاضلية :</u>

- $i = I_0\,(1 - e^{-t/\tau})$

- $\frac{di}{dt} = I_0\,(0 - (-\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau})) = \frac{I_0}{\tau} e^{-t/\tau}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{I_0}{\tau} e^{-t/\tau} + \frac{I_0}{\tau}(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{I_0}{\tau} \rightarrow \frac{I_0}{\tau} e^{-t/\tau} + \frac{I_0}{\tau} - \frac{I_0}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{I_0}{\tau} \rightarrow \frac{I_0}{\tau} = \frac{I_0}{\tau}$$

إذن الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية .

3- قيمتي $\tau$ و $I_0$ :

الطريقة (1) :

البيان $\frac{di}{dt} = f(i)$ عبارة عن مستقيم لا يمر من المبدأ لذا يكون :

$$\frac{di}{dt} = a\,i + b \quad ........................... (1)$$

نظريا و من المعادلة التفاضلية يكون :

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{\tau} i + \frac{I_0}{\tau} \quad ........................ (2)$$

بمطابقة العلاقة البيانية (1) بالعلاقة النظرية (2) يكون :

- $-\frac{1}{\tau} = a \rightarrow \tau = -\frac{1}{a}$
- $\frac{I_0}{\tau} = b \rightarrow I_0 = \tau\, b$

من البيان :

- $a = -\frac{4\,.\,3}{6\,.\,0.02} = -100$
- $b = 4\,.\,3 \rightarrow b = 12$

و منه :

- $\tau = -(-\frac{1}{100}) = 0.01 s$
- $I_0 = 0.01 . 12 = 0.12\ A$

الطريقة (2) :

- في النظام الدائم يكون : $\frac{di}{dt} = 0$ ، $i = I_0$ بالإسقاط في البيان نجد : $I_0 = 0.12\ A$ .

- من أجل $i = 0$ يكون من البيان $\frac{di}{dt} = 12$ بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد :

$$12 + \frac{1}{\tau}(0) = \frac{I_0}{\tau} \rightarrow 12 = \frac{I_0}{\tau} \rightarrow I_0 = 12\,\tau = 12\,.\,0.01 = 0.12\ A$$

• قيمة L :

$$E_{(L)0} = \frac{1}{2} L I_0^2 \rightarrow L = \frac{2\,E_{(L)0}}{I_0^2} \quad \rightarrow L = \frac{2\ .\ 7.2.10^{-3}}{(0.12)^2} = 1H$$

• قيمة r :

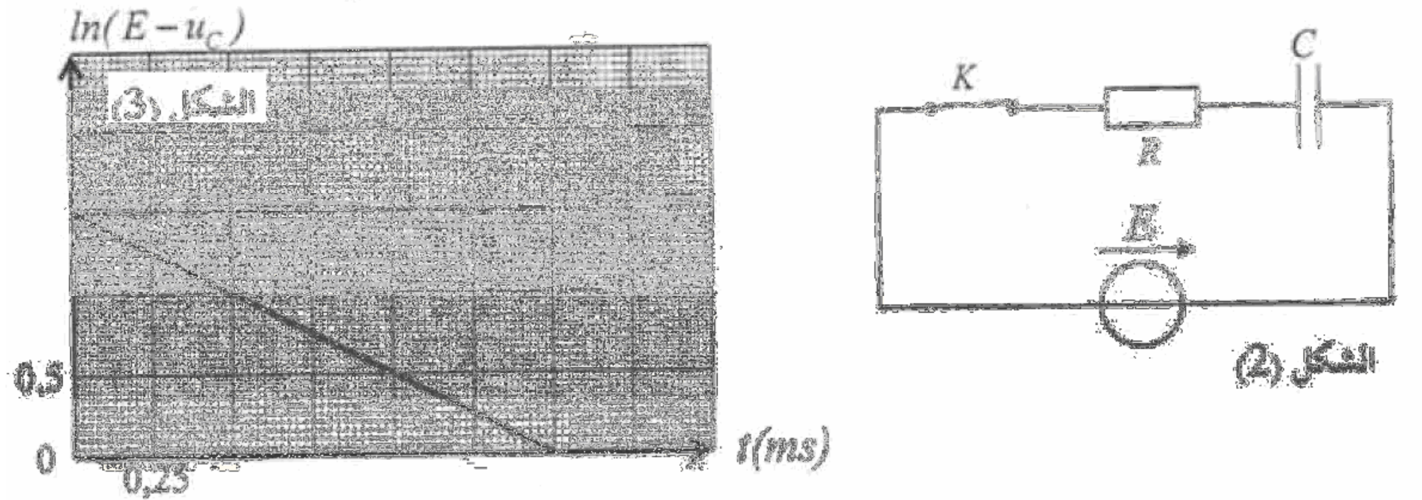
$$\tau = \frac{L}{R+r} \rightarrow R + r = \frac{L}{\tau} \rightarrow r = \frac{L}{\tau} - R \quad \rightarrow r = \frac{1}{0.01} - 90 = 10\,\Omega$$

• قيمة E :

$$E = 0.12\ (90+10) = 12\ V \quad \rightarrow I_0 = \frac{E}{R+r} \rightarrow E = I_0\,(R+r)$$

## التمرين (4) : (بكالوريا 2015 - رياضيات ) ( التمرين : 028 في بنك التمارين على الموقع ) (**)

تستعمل المكثفات في عدة تراكيب كهربائية ذات فائدة علمية في الحياة اليومية .
بغرض حساب سعة مكثفة غير مشحونة مسبقا ، نحقق التركيب الموضح بالشكل(2) حيث $R = 100\ \Omega$ و المولد ثابت التوتر قوته المحركة الكهربائية E .



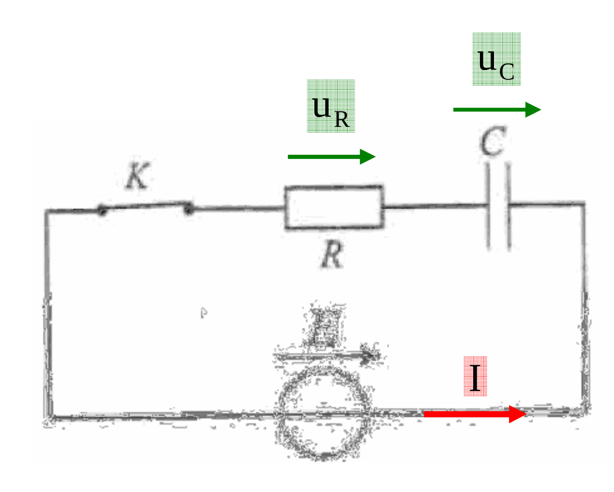

1- أعد رسم الدارة موضحا عليها التوترات بأسهم وجهة التيار الكهربائي .
2- بتطبيق قانون جمع التوترات ، جد المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة .
3- بين ان العبارة $u_C(t) = A(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ هي حل للمعادلة التفاضلية ، حيث A و τ ثابتان يطلب كتابة عبارتيهما .
4- بين أن : $\ln(E - u_C) = -\frac{1}{\tau}\,t + \ln E$ .
5- بيان الشكل(3) يمثل تغيرات $\ln(E - u_C)$ بدلالة الزمن ، استنتج من البيان :
أ- قيمة E القوة المحركة الكهربائية للمولد .
ب- قيمة ثابت الزمن τ ، و قيمة سعة المكثفة C .
6- أ- اكتب العبارة اللحظية للطاقة المخزنة في المكثفة $E_{(C)}(t)$ .
ب- نرمز بـ $E_{(C)}(\tau)$ للطاقة المخزنة في المكثفة عند اللحظة $t = \tau$ و بـ $E_C(\infty)$ للطاقة العظمى .

- احسب النسبة $\frac{E_{(C)}(\tau)}{E_{(C)}(\infty)}$ .

7- كيف يتم ربط مكثفة سعتها C' مع المكثفة السابقة لكي يأخذ ثابت الزمن القيمة $\tau' = \frac{\tau}{4}$ ؟ و احسب قيمة C' .

**الأجوبة :**

1- رسم الدارة :




2- المعادلة التفاضلية بدلالة $u_C(t)$ :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = E$$

$$R.i + u_C = E \rightarrow R\frac{dq}{dt} + u_C = E \rightarrow R\frac{d(C.u_C)}{dt} + u_C = E$$

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E \rightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC}$$

3- عبارتي A و τ :

- $u_C = A(1 - e^{-t/\tau})$
- $\frac{du_C}{dt} = A(0 - (-\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau})) = \frac{A}{\tau}e^{-t/\tau}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{A}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{1}{RC}A(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{RC} \rightarrow \frac{A}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{A}{RC} - \frac{A}{RC}e^{-t/\tau} = \frac{E}{RC}$$

$$Ae^{-t/\tau}(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{RC}) + \frac{A}{RC} = \frac{E}{RC}$$

لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

- $\frac{1}{\tau} - \frac{1}{RC} = 0 \rightarrow \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} \rightarrow \tau = RC$
- $\frac{A}{RC} = \frac{E}{RC} \rightarrow A = E$

4- إثبات العلاقة $\ln(E-u_C) = -\frac{t}{\tau} + \ln E$ :

$u_C = E\,(1-e^{-t/\tau})$

$u_C = E - Ee^{-t/\tau} \rightarrow u_C = E - Ee^{-t/\tau} \rightarrow Ee^{-t/\tau} = E - u_C$

$E - u_C = Ee^{-t/\tau} \rightarrow \ln(E-u_C) = \ln(Ee^{-t/\tau}) \rightarrow \ln(E-u_C) = \ln E + \ln e^{-t/\tau}$

$\ln(E-u_C) = \ln E - \frac{t}{\tau} \rightarrow \ln(E-u_C) = -\frac{t}{\tau} + \ln E$

5- أ- قيمة E :

- بيانيا المنحنى $\ln(E-u_C) = f(t)$ عبارة عن مستقيم لا يمر من المبدأ معادلته من الشكل :

$\ln(E-u_C) = a\,t + b$ ............................ (1)

نظريا و مما سبق :

$\ln(E-u_C) = -\frac{t}{\tau} + \ln E$ .......................... (2)

بمطابقة العلاقتين (1) ، (2) :

$\ln E = b \rightarrow E = e^{b}$

من البيان :

▪ $b = 1.5 \rightarrow E = e^{1.5} \rightarrow E = 4.5\ V$

ب- قيمة $\tau$ :

بالمطابقة السابقة أيضا :

$-\frac{1}{\tau} = a \rightarrow \tau = -\frac{1}{a}$

من البيان :

▪ $a = -\frac{1.5}{6\ .\ 0,25\ .10^{-3}} = -10^{3}$

إذن :

$\tau = -\frac{1}{-10^{3}} = 10^{-3}\ s = 1\,ms$

- قيمة C :

$\tau = RC \rightarrow C = \frac{\tau}{R} \rightarrow C = \frac{10^{-3}}{100} = 10^{-5}F = 10\,\mu F$

6- أ- عبارة الطاقة المخزنة اللحظية :

$E_{(C)} = \frac{1}{2} C\, u_C{}^{2}$

و حيث أن : $u_C = E\,(1-e^{-t/\tau})$ يكون :

$E_{(C)} = \frac{1}{2} C\, E^{2}(1-e^{-t/\tau})^{2} \rightarrow E_{(C)} = E_{(C)0}(1-e^{-t/\tau})^{2}$

ب- النسبة $\frac{E_{(C)}(\tau)}{E_{(C)}(\infty)}$ :

من العبارة السابقة $E_{(C)}(t)$ : $E_{(C)}(\infty) = E_{(C)0}$ و بقسمة عبارة $E_{(C)}(t)$ على عبارة $E_{(C)}(\infty)$ نجد :

$$\frac{E_{(C)}(t)}{E_{(C)}(\infty)} = \frac{E_{(C)0}(1-e^{-t/\tau})^2}{E_{(C)0}} \rightarrow \frac{E_{(C)}(t)}{E_{(C)}(\infty)} = (1-e^{-t/\tau})^2$$

$$t = \tau \rightarrow \frac{E_{(C)}(\tau)}{E_{(C)}(\infty)} = (1-e^{-\tau/\tau})^2 = (1-e^{-1}) \rightarrow \frac{E_{(C)}(\tau)}{E_{(C)}(\infty)} \approx 0.4$$

7- كيفية وصل المكثفة 'C مع المكثفة C :

نلاحظ أن :

$$\tau' = \frac{\tau}{4} \rightarrow \tau' < \tau \rightarrow RC_{éq} < RC \rightarrow C_{éq} < C$$

و هذا يتحقق عند ربط المكثفة 'C على التسلسل مع المكثفة C لأن :

$$\frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \rightarrow C_{éq} < C$$

قيمة 'C :

$$\frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \rightarrow \frac{1}{C'} = \frac{1}{C_{éq}} - \frac{1}{C} \rightarrow \frac{1}{C'} = \frac{C - C_{éq}}{C_{éq}.C} \rightarrow C' = \frac{C_{éq}C}{C - C_{éq}}$$

- $\tau' = RC_{éq} \rightarrow C_{éq} = \frac{\tau'}{R} = \frac{\frac{\tau}{4}}{R} = \frac{\tau}{4R} \rightarrow C_{éq} = \frac{10^{-3}}{4\ .\ 100} = 2.5 .\ 10^{-6}$

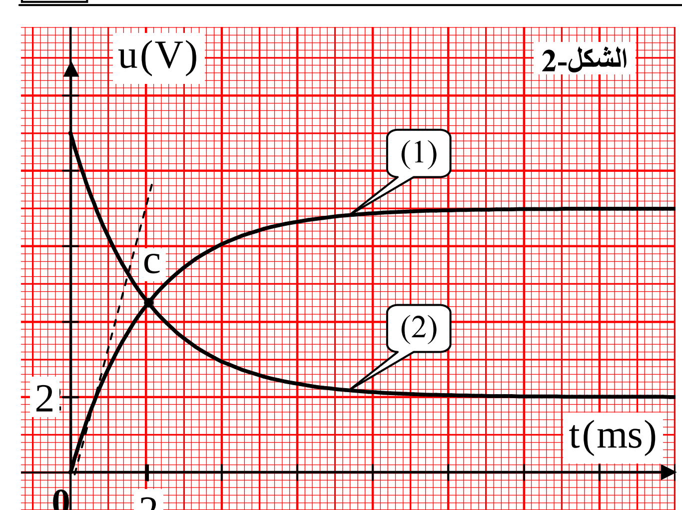
- $C' = \frac{2.5\ .\ 10^{-6}\ .\ 10^{-5}}{10^{-5} - 2.5\ .\ 10^{-6}} \rightarrow C' = 3.33\ .\ 10^{-6} = 3.33\ \mu F$

## التمرين (5) : ( التمرين : 030 في بنك التمارين على الموقع ) (**)

الدارة الكهربائية المبينة في (الشكل-1) تتكون من العناصر التالية موصولة على التسلسل : مولد للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائية $E = 9\ V$ ، ناقل أومي مقاومته R ، وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية $r = 10\ \Omega$ .

في اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة K ، بواسطة الـ ExAO يمكن الحصول على المنحنيين (1) ، (2) المبينين في (الشكل-2) و الممثلين لتغيرات التوتر $u_R(t)$ بين طرفي الناقل الأومي و التوتر $u_b(t)$ بين طرفي الوشيعة .

الشكل-1




1- ما هو الجهاز الذي يمكن وضعه بدلا من ExAO لتسجيل هذين المنحنيين البيانيين .

2- أي المنحنيين (1) ، (2) يمثل تغيرات التوتر $u_R$ بين طرفي الناقل الأومي و أيهما يمثل تغيرات التوتر $u_b$ بين طرفي الوشيعة مع التعليل .

3- اعتمادا على المنحنيين البيانيين (1) ، (2) أوجد :

أ- مقاومة الناقل الأومي R .

ب- ذاتية الوشيعة L من دون الاستعانة بقيمة ثابت الزمن τ .

جـ- ثابت الزمن τ (تأكد من صحة قيمة الذاتية L المحسوبة سابقا) .

3- المنحنيان (1) ، (2) يتقاطعان في النقطة c .

أ- أثبت أن ثابت الزمن يعبر عه بالعلاقة : $\tau = \dfrac{t_c}{\ln(\dfrac{2R}{R-r})}$

حيث $t_c$ هي اللحظة الموافقة لنقطة التقاطع c ، و علما أن :

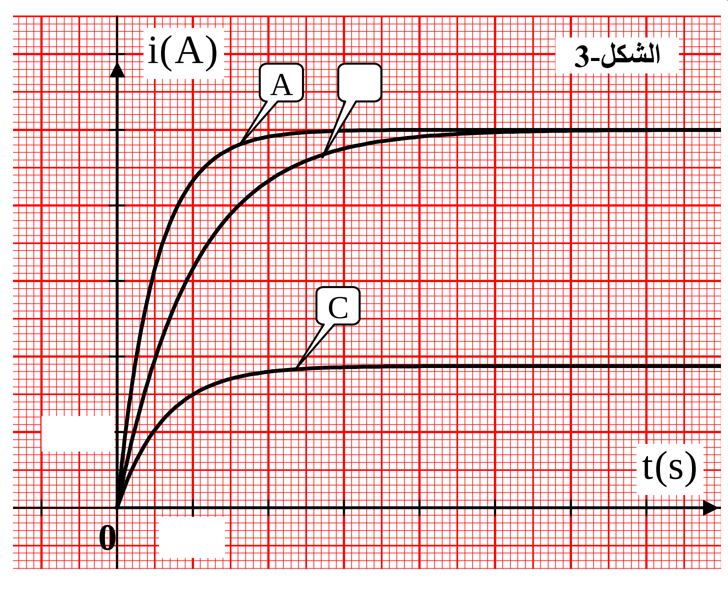
$$u_b = \frac{Er}{R+r} + \frac{ER}{R+r}e^{-\frac{t}{\tau}} \quad , \; u_R = \frac{ER}{R+r}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$$

ب- أحسب قيمة ثابت الزمن τ و تأكد من أنها توافق النتيجة المتحصل عليها سابقا .

4- نعيد التجربة ثلاث مرات من أجل قيم مختلفة لمقاومة الناقل الأومي R و قيم مختلفة لذاتية الوشيعة L مع تثبيت القوة المحركة الكهربائية E للمولد و المقاومة الداخلية r للوشيعة ، وفق الجدول التالي :

| | التجربة (1) | التجربة (2) | التجربة (3) |
|---|---|---|---|
| L(mH) | 15 | 10 | 20 |
| R (Ω) | 120 | 90 | 90 |

يبين (الشكل-3) المنحنيات البيانية (A) ، (B) ، (C) الممثلة لتطور شدة التيار الكهربائي i(t) بدلالة الزمن t بالنسبة للتجارب الثلاث من دون ترتيب :




- حدد دون حساب و مع التعليل المنحنى الموافق لكل تجربة .

**الأجوبة :**

1- أ- الجهاز الذي يمكن وضعه بدل ExAO هو راسم الاهتزاز المهبطي .

2- المنحنى الموافق لكل توتر :

من خصائص ثنائي القطب RL :

$t = 0 \rightarrow i = 0 \rightarrow u_R = 0$

و هذا يتفق مع المنحنى (1) ، إذن المنحنى (1) يمثل التوتر $u_R$ بين طرفي الناقل الأومي في حين يمثل المنحنى (2) التوتر $u_b$ بين طرفي الوشيعة .

طريقة أخرى :

حسب قانون جمع التوترات :

$u_b + u_R = E \rightarrow u_b = E - u_R$

$t = 0 \rightarrow i = 0 \rightarrow u_R = 0 \rightarrow u_b = E \neq 0$

و هذا يتفق مع المنحنى (2) و بالتالي فهو يمثل التوتر $u_b$ بين طرفي الوشيعة في حين يمثل المنحنى (1) التوتر $u_R$ بين طرفي الناقل الأومي .

3- أ- مقاومة الناقل الأومي R :

لدينا :

- $u_R = R.i$
- $u_b = L.\frac{di}{dt} + r.i$

في النظام الدائم اين $i = I_0$ ، $\frac{di}{dt} = 0$ نكتب :

- $u_{R(\infty)} = RI_0 \rightarrow I_0 = \frac{u_{R(\infty)}}{R}$ ..................... (1)
- $u_{b(\infty)} = rI_0 \rightarrow I_0 = \frac{u_{b(\infty)}}{r}$ ..................... (2)

من (1) ، (2) :

$$\frac{u_{R(\infty)}}{R} = \frac{u_{b(\infty)}}{r} \rightarrow R = \frac{r\,.\,u_{R(\infty)}}{u_{b(\infty)}}$$

من البيان : $u_{R(\infty)} = 7\ V$ ، $u_{b(\infty)} = 2\ V$ و منه :

$$R = \frac{10\,.\,7}{2} = 35\,\Omega$$

ب- ذاتية الوشيعة :

$$u_{b(t)} = L\,(\frac{di}{dt})_{(t)} + R.i_{(t)} \rightarrow L\,(\frac{di}{dt})_{(t)} = u_{b(t)} - R.i_{(t)} \rightarrow L = \frac{u_{b(t)} - R.i_{(t)}}{(\frac{di}{dt})_{(t)}}$$

L ثابت في أي لحظة و بالتالي نحسب المقادير $u_{b(t)}$ ، $i_{(t)}$ ، $(\frac{di}{dt})_{(t=0)}$ في لحظة من اللحظات التي تتوفر في كل المعطيات ، نختار اللحظة $t = 0$ .

- من المنحنى $u_b(t)$ :

$$t = 0 \rightarrow u_b = 9\ V$$

- من المنحنى $u_R(t)$ :

$$t = 0 \rightarrow u_R = 0 \rightarrow i = \frac{u_R}{R} = 0$$

- لدينا :

$$u_R = R.i \rightarrow i = \frac{u_R}{R} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{R}\frac{du_R}{dt}$$

يمثل المقدار $\frac{du_R}{dt}$ ميل مماس المنحنى $u_R(t)$ و عليه يكون من هذا المنحنى :

$$t = 0 \rightarrow \frac{d(u_R)}{dt} = \frac{7}{2.\ 10^{-3}} = 3500$$

و منه :

$$(\frac{di}{dt})_{(t=0)} = \frac{1}{35}.3500 = 100$$

إذن :

$$L = \frac{9-0}{100} = 0.09\ H$$

<u>جـ- ثابت الزمن $\tau$ :</u>

من خلال مماس المنحنى $u_R(t)$ عند اللحظة $t = 0$ يكون $\tau = 2\ ms$ .

<u>- التأكد من قيمة L :</u>

$$\tau = \frac{L}{R+r} \rightarrow L = \tau(R+r) \rightarrow L = 2\ .10^{-3}(35+10) = 0.09\ H$$

<u>3- أ- إثبات العلاقة $\tau = \frac{t_C}{\ln(\frac{2R}{R-r})}$ :</u>

- $u_b(t) = \frac{Er}{R+r} + \frac{ER}{R+r}e^{-\frac{t}{\tau}}$
- $u_R(t) = \frac{ER}{R+r}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

عند نقطة التقاطع في اللحظة $t_C$ يكون :

$$u_b(t_C) = u_r(t_C)$$

$$\frac{Er}{R+r} + \frac{ER}{R+r}e^{-\frac{t_C}{\tau}} = \frac{ER}{R+r}(1 - e^{-\frac{t_C}{\tau}}) \rightarrow \frac{Er}{R+r} + \frac{ER}{R+r}e^{-\frac{t_C}{\tau}} = \frac{ER}{R+r} - \frac{ER}{R+r}e^{-\frac{t_C}{\tau}}$$

$$r + Re^{-\frac{t_C}{\tau}} = R - Re^{-\frac{t_C}{\tau}} \rightarrow 2Re^{-\frac{t_C}{\tau}} = R - r \rightarrow e^{-\frac{t_C}{\tau}} = \frac{R-r}{R}$$

$$-\frac{t_C}{\tau} = \ln(\frac{R-r}{R}) \rightarrow \frac{t_C}{\tau} = -\ln(\frac{R-r}{R})$$

$$\frac{t_C}{\tau} = -\ln(\frac{R}{R-r}) \rightarrow \tau = \frac{t_C}{\ln(\frac{R}{R-r})}$$

- من البيان $t_C = 2\ ms$ و منه :

$$\tau = \frac{2\ .\ 10^{-3}}{\ln(\frac{2\ .35}{35-10})} = 2\ .\ 10^{-3}\ s$$

و هي نفس النتيجة السابقة تقريبا .

4- المنحنى الموافق لكل تجربة :

- التجربتين الموافقتين للمنحنيين (A) ، (B) لهما نفس شدة التيار الأعظمية $I_0$ و بما أن $I_0 = \frac{E}{R+r}$ و $E$ ، $r$ نفسهما في جميع التجارب تكون $I_0$ متعلقة بقيمة $R$ فقط و عليه التجربتين الموافقتين للمنحنيين (A) ، (B) تكونان لهما نفس المقاومة و هذا محقق في التجربتين (2) ، (3) أي أن المنحنيين (A) ، (B) يوافقان التجربتين (2) ، (3) من غير ترتيب في حين يوافق المنحنى (C) التجربة (1) .

- من البيان نلاحظ أن ثابت الزمن $\tau_1$ في التجربة (1) أقل من ثابت الزمن $\tau_2$ في التجربة (2) أي $\tau_1 < \tau_2$ و حيث أن $\tau = \frac{L}{R+r}$ و $r$ ، $R$ نفسهما في التجربتين الموافقتين للمنحنيين (A) ، (B) يكون $\tau$ متعلق بـ $L$ حيث يزداد كلما ازدادت قيمة $L$، و بما أن $\tau_2 > \tau_1$ تكون للتجربة الموافقة المنحنى (B) ذاتية أكبر و هذا يوافق التجربة (3) أي المنحنى (B) يوافق التجربة (3) ليوافق المنحنى (A) التجربة (2) إذن :

التجربة (1) ← المنحنى (C)
التجربة (2) ← المنحنى (A)
التجربة (3) ← المنحنى (B)

**التمرين (6) :** ( التمرين : 073 في بنك التمارين على الموقع ) (**)

نعتبر الدارة الكهربائية المبينة في الشكل التالي و التي تتكون من مولد للتوتر قوته المحركة الكهربائية $E$ ، قاطعة $K$ ، ناقل أومي مقاومتة $R = 100\ \Omega$ ، وشيعة ذاتيتها $L$ و مقاومتها الداخلية $r$ . توصل الدراة براسم اهتزاز مهبطي ذي مدخلين $Y_A$ و $Y_B$ (الشكل-1)

K
E
R
L , r
M
B
A
$Y_B$
$Y_A$
**الشكل-1**

نغلق القاطعة في اللحظة $t = 0$ فيظهر على شاشة راسم الاهتزاز المهبطي المنحنيين (1) ، (2) المبينين في (الشكل-2) .

1- أنسب كل منحنى بالمدخل الموافق مع التعليل .

2- بين أن المعادلة التفاضلية بدلالة $i(t)$ تكون من الشكل :

$$L\frac{di}{dt} + (R+r)\,i = E$$

3- بالاعتماد على المنحنيين (1) ، (2) ، أحسب :

أ- القوة المحركة الكهربائية $E$ .

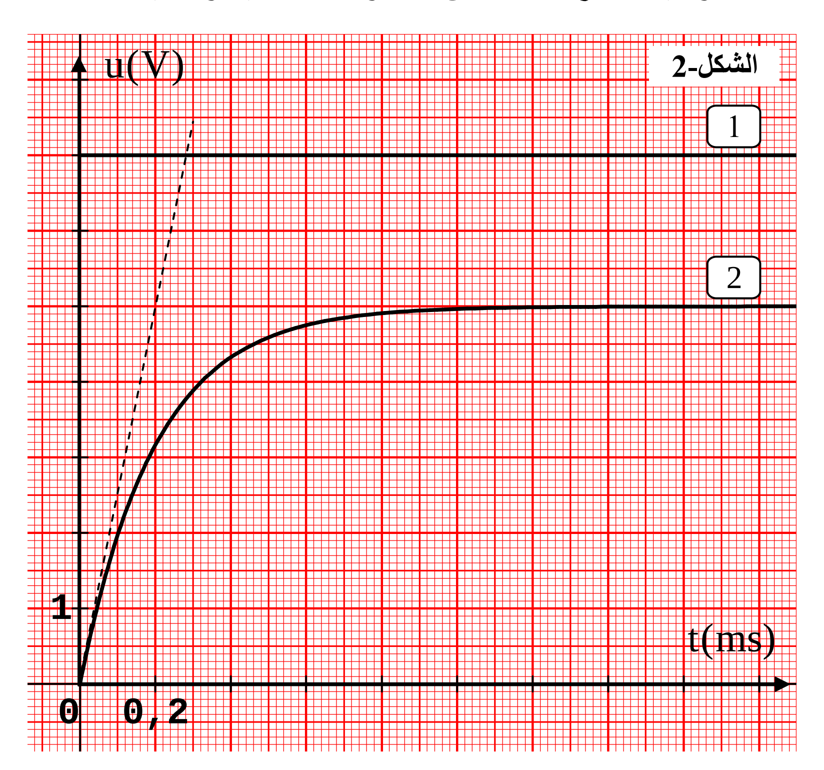
ب- شدة التيار الكهربائي الأعظمي $I_0$ .

جـ- المقاومة الداخلية للوشيعة $r$ .

4- من المنحنى الموافق للمدخل $Y_B$ عين قيمة المقدار $\frac{di}{dt}$ عند اللحظة $t = 0$ ثم استنتج ذاتية الوشيعة $L$ من دون الاستعانة بـ $\tau$ .

5- أوجد بطريقتين مختلفتين ثابت الزمن $\tau$ لهذه الدارة .

6- على نفس الشكل-2 المعطى بعد نقله على ورقة إجابتك ، أرسم بشكل كيفي المنحنى الذي تشاهده على المدخل $Y_B$ في حالة استبدال الوشيعة السابقة بوشيعة أخرى لها نفس المقاومة الداخلية و ذاتيتها $L' = 2L$ .




**الأجوبة :**

1- المنحنى الموافق لكل مدخل :

- من خلال طريقة ربط راسم الاهتزاز المهبطي بالدارة ، يظهر المدخل $Y_A$ التوتر بين طرفي المولد في حين يظهر المدخل $Y_B$ التوتر بين طرفي الناقل الأومي .
- من المنحنى (1) التوتر ثابت وهذا يتفق مع التوتر بين طرفي مولد التوتر الذي يكون التوتر بين طرفيه ثابت ، إذن المنحنى (1) هو الذي يظهر على المدخل $Y_A$ .
- لدينا : $u_R = Ri$

في ثنائي القطب RL عند غلق القاطعة يكون :

$t=0 \to i=0 \to u_R=0$

وهذا يتفق مع المنحنى (2) بمعنى أن المنحنى (2) يمثل التوتر بين طرفي الناقل الأومي وبالتالي هو الذي يظهر على المدخل $Y_B$ .

2- المعادلة التفاضلية بدلالة $i(t)$ :

حسب قانون جمع التوترات

$u_b + u_R = E$

$L\frac{di}{dt} + ri + Ri = E$

$L\frac{di}{dt} + (R+r)i = E \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L}i = \frac{E}{L}$

3- أ- قيمة E :

التوتر بين طرفي مولد التوتر يكون ثابت ومن المنحنى (1) الذي يوافقه يمكن قول : $E = 7V$ .

ب- شدة التيار الاعظمية :

$u_R = Ri$

في النظام الدائم اين $i = I_0$ نكتب :

$u_{R(\infty)} = RI_0 \rightarrow I_0 = \frac{u_{R(\infty)}}{R}$

من المنحنى (2) : $u_{R(\infty)} = 5V$ ومنه :

$I_0 = \frac{5}{100} = 0{,}05A$

جـ- المقاومة الداخلية للوشيعة r :

$I_0 = \frac{E}{R+r} \rightarrow R+r = \frac{E}{I_0} \rightarrow r = \frac{E}{I_0} - R$

$r = \frac{7}{0{,}05} - 100 = 40\Omega$

4- قيمة $\frac{di}{dt}$ عند $t=0$ :

$u_R = Ri \rightarrow i = \frac{u_R}{R} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{R}\frac{du_R}{dt}$

تمثل $\frac{du_R}{dt}$ ميل مماس المنحنى $u_R(t)$ (المنحنى 2) وبالتالي :

$\left(\frac{du_R}{dt}\right)_{t=0} = \frac{5}{0{,}2 \cdot 10^{-3}} = 2{,}5 \cdot 10^4$

اذن :

$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = \frac{1}{100} \times 2{,}5 \cdot 10^4 = 250$

ذاتية الوشيعة :

من المعادلة التفاضلية :

$L\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} + (R+r)(i)_{t=0} = E$

$L\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = E - (R+r)(i)_{t=0} \rightarrow L = \frac{E - (R+r)(i)_{t=0}}{\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0}}$

من خصائص ثنائي القطب RL عند غلق القاطعة $(i)_{t=0}=0$ ولدينا سابقا $\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0}=250$ ، يكون إذن :

$$L=\frac{7-0}{250}=2,8.10^{-2}\,H$$

5- ثابت الزمن $\tau$ :

طريقة (1) ← بيانية :

$t=\tau \rightarrow u_R=0,63\,U_{Rmax}=0,63\times 5=$ 3,15V

بالاسقاط في المنحنى (2) نجد : $\tau=0,2\,ms$ .

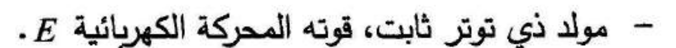
طريقة (2) - حسابية :

$$\tau=\frac{L}{R+r}$$

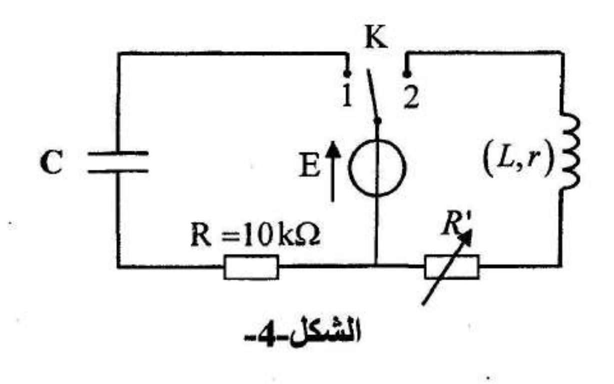
$$\tau=\frac{2,8.10^{-2}}{100+40}=2.10^{-4}\,s=0,2\,ms$$

**التمرين (7) :** (بكالوريا 2018 - علوم تجريبية) ( التمرين : 075 في بنك التمارين على الموقع ) (**)

بغرض معرفة سلوك ومميزات كل من مكثفة سعتها $C$ ووشيعة مقاومتها $r$ وذاتيتها $L$ ، نحقّق التركيب الكهربائي المبيّن في الشكل-4- والذي يتكون من العناصر الكهربائية التالية:



- مولد ذي توتر ثابت، قوته المحركة الكهربائية $E$.
- مكثفة فارغة سعتها $C$.
- وشيعة مقاومتها $r$ وذاتيتها $L$.
- ناقل أومي مقاومته $R=10K\Omega$ .
- مقاومة متغيرة $R'$.
- بادلة $k$ .




الشكل-4-

1. نضع في اللحظة $t=0$ البادلة $K$ في الوضع (1).

أنقل مخطط الدارة على ورقة الإجابة، وبيّن عليه جهة مرور التيار الكهربائي ثم مثّل:

- أسهم التوترين بين طرفي المقاومة $(u_R)$ والمكثفة $(u_c)$.
- كيفية توصيل الدارة براسم اهتزاز ذي ذاكرة لمعاينة التوتر الكهربائي بين طرفي المقاومة $u_R(t)$.

2. من القياسات المتحصل عليها وبواسطة برمجية مناسبة، تمكّنا من الحصول على النتائج المدوّنة في الجدول الآتي:

| $t(s)$ | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_R(V)$ | 6,00 | 3,63 | 2,22 | 1,34 | 0,81 | 0,50 | 0,30 |
| $-\frac{du_R}{dt}\ (V\cdot s^{-1})$ | 0,60 | 0,36 | 0,22 | 0,13 | 0,08 | 0,05 | 0,03 |

2.1. بتطبيق قانون جمع التوترات جِد المعادلة التفاضلية التي يحقّقها التوتر بين طرفي الناقل الأومي $u_R(t)$.

2.2. ارسم البيان الممثل للدالة: $(-\frac{du_R}{dt}) = f(u_R)$ ثم اكتب معادلته الرياضية.

2.3. استنتج قيمة كل من القوة المحركة الكهربائية $E$ وسعة المكثفة $C$ .

2.4. احسب الطاقة الكهربائية المخزنة في المكثفة في اللحظة $t = 25s$ .

3. نضع الآن البادلة $K$ في الوضع (2) في لحظة نعتبرها مبدأ لقياس الأزمنة $t = 0$ .

3.1. جِد المعادلة التفاضلية التي تحققها شدة التيار $i(t)$ .

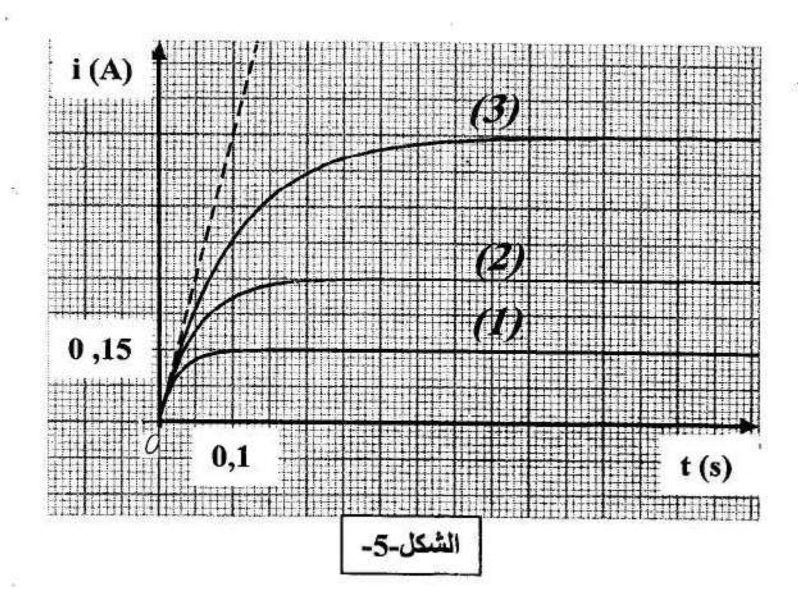
3.2. علما أنّ حل المعادلة التفاضلية السابقة هو من الشكل $i(t) = A(1-e^{-B.t})$ ، جد العبارة الحرفية لكل من الثابتين $A$ و $B$.

4. يمثل الشكل -5- منحنيات تغيرات شدة التيار المار في الدارة بدلالة الزمن، من أجل ثلاث قيم مختلفة للمقاومة $R'$ المدوّنة في الجدول الآتي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $R'(\Omega)$ | 8 | 18 | 38 |

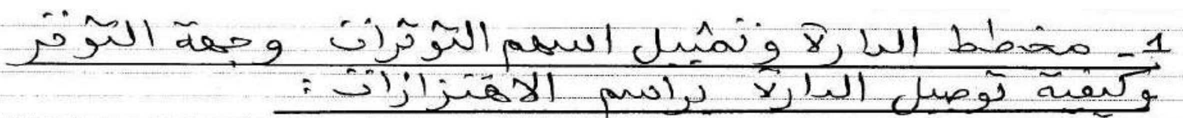
4.1. أرفق كل منحنى بالمقاومة الموافقة مستعينا بعبارة شدة التيار في النظام الدائم ثم استنتج قيمة مقاومة الوشيعة $r$.

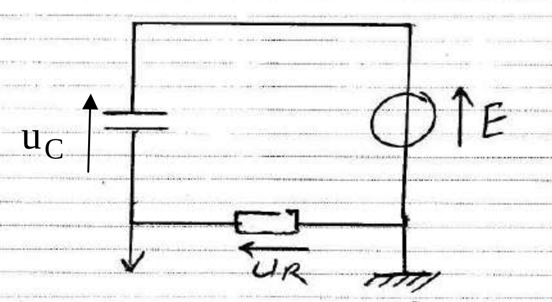
4.2. باستغلال المنحنى (3) : جِد قيمة ذاتية الوشيعة $L$ .



الشكل-5-

**الأجوبة :**




2-1- المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_R(t)$ :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = E$$

$$u_R + \frac{q}{C} = E$$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = 0$$

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

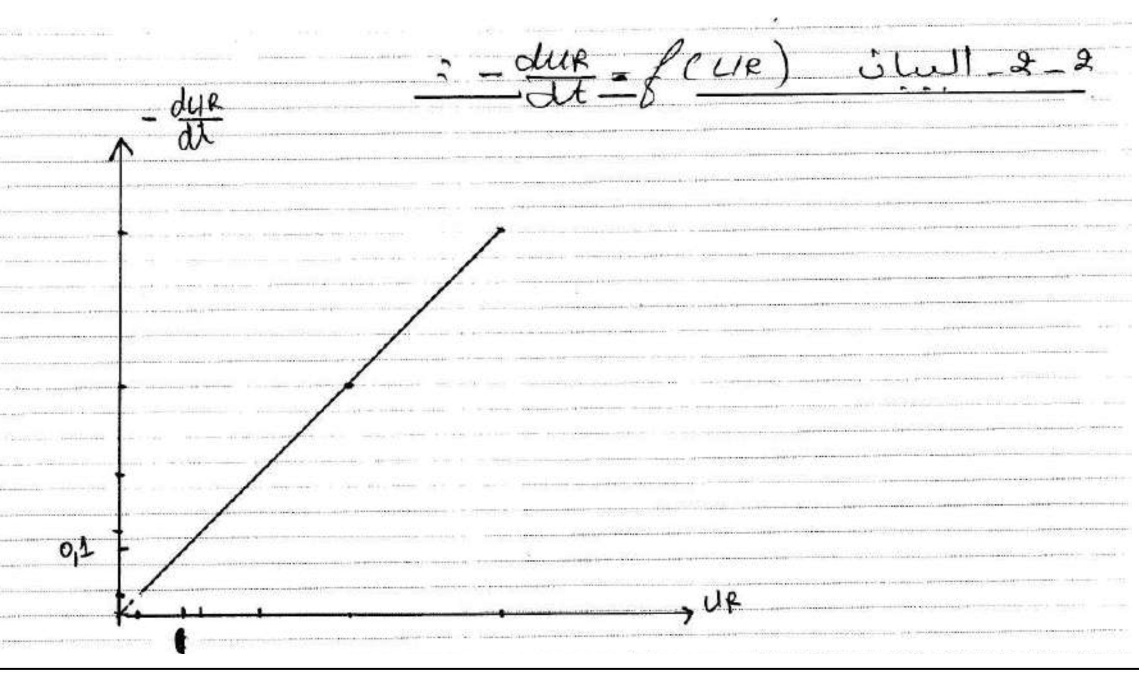
وحيث أن :

$$u_R = Ri \rightarrow i = \frac{u_R}{R}$$

تصبح :

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC} u_R = 0$$

2-2- البيان $-\frac{du_R}{dt} = f(u_R)$ :



- المعادلة الرياضية للبيان :

البيان عبارة عن مستقيم يمر من المبدأ معادلته من الشكل : $-\frac{du_R}{dt} = a\, u_R$

حيث : $a$ معامل .

- من البيان :

$$a = \frac{0{,}6}{6} = 0{,}1 \ s^{-1}$$

اذن معادلة البيان تكون كما يلي :

$$-\frac{du_R}{dt} = 0{,}1\ u_R$$

2-3- قيمة E :

حسب قانون جمع التوترات

$$u_{R(t)} + u_{C(t)} = E$$

عند اللحظة $t=0$ نكتب :

$$u_{R(t=0)} + u_{C(t=0)} = E$$

من الجدول :

$$\circ\ t=0 \rightarrow u_{R(t=0)} = 6V$$

ومن الشروط الابتدائية :

$$\circ\ t=0 \Rightarrow q_{(t=0)} = 0$$

يصبح :

$$6 + 0 = E \longrightarrow E = 6V$$

- قيمة C :

- بيانيا :

$$-\frac{du_R}{dt} = 0{,}1\ u_R$$

- نظريا ومن خلال المعادلة التفاضلية السابقة

$$-\frac{du_R}{dt} = \frac{1}{RC}\, u_R$$

بالمطابقة :

$$\frac{1}{RC} = 0{,}1 \longrightarrow C = \frac{1}{0{,}1 \times R}$$

$$C = \frac{1}{0{,}1 \cdot 10^4} = 10^{-3} F$$

2-4- الطاقة الكهربائية المخزنة في المكثفة عند اللحظة $t = 25s$ :

$$E_{(C)(t)} = \frac{1}{2} C u_{C(t)}^2$$

عند اللحظة $t = 25\,s$ نكتب :

$$E_{(C)(25s)} = \frac{1}{2} C\, u^2_{C(25s)}$$

- حسب قانون جمع التوترات:

$$u_{R(t)} + u_{C(t)} = E$$

وعند اللحظة $t = 25s$ نكتب:

$$u_{R(25)} + u_{C(25s)} = E \rightarrow u_{C(25s)} = E - u_{R(25s)}$$

من الجدول $u_{R(25)} = 0{,}5V$ ومنه:

$$u_{C(25s)} = 6 - 0{,}5 = 5{,}5V$$

إذن:

$$E_{(C)(25s)} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} (5{,}5)^2 = 1{,}51 \cdot 10^{-2} J$$

3-1- المعادلة التفاضلية التي تحققها $i(t)$:

حسب قانون جمع التوترات:

$$u_{b(t)} + u_{R(t)} = E$$

$$L\frac{di}{dt} + ri + Ri = E$$

$$L\frac{di}{dt} + (R+r)i = E \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L} i = \frac{E}{L}$$

3-2- العبارة الحرفية لـ A و B:

- $i = A(1 - e^{-Bt})$
- $\frac{di}{dt} = A(0 - (-Be^{-Bt})) = ABe^{-Bt}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$ABe^{-Bt} + \frac{R+r}{L} A(1 - e^{-Bt}) = \frac{E}{L}$$

$$ABe^{-Bt} + \frac{A(R+r)}{L} + \frac{A(R+r)}{L} e^{-Bt}$$

$$Ae^{-Bt}\left(B - \frac{R+r}{L}\right)e^{-Bt} + \frac{A(R+r)}{L} = \frac{E}{L}$$

لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون:

- $B - \frac{R+r}{L} = 0 \rightarrow B = \frac{R+r}{L}$
- $\frac{A(R+r)}{L} = \frac{E}{L} \rightarrow A = \frac{E}{R+r}$

4-1- المنحنى الموافق لكل مقاومة :

لدينا $I_0 = \frac{E}{R+r}$ ، من هذه العبارة كلما كانت المقاومة R أكبر كانت شدة التيار العظمى أقل وعلى هذا الأساس يكون :

المنحنى (1) ⟵ $R = 38\,\Omega$

المنحنى (2) ⟵ $R = 18\,\Omega$

المنحنى (3) ⟵ $R = 8\,\Omega$

3-2- العبارة الحرفية لـ A و B :

- $i = A\left(1 - e^{-Bt}\right)$

- $\frac{di}{dt} = A\left(0 - \left(-Be^{-Bt}\right)\right) = ABe^{-Bt}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$ABe^{-Bt} + \frac{R+r}{L}A\left(1 - e^{-Bt}\right) = \frac{E}{L}$$

$$ABe^{-Bt} + \frac{A(R+r)}{L} + \frac{A(R+r)}{L}e^{-Bt}$$

$$Ae^{-Bt}\left(B - \frac{R+r}{L}\right)e^{-Bt} + \frac{A(R+r)}{L} = \frac{E}{L}$$

لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

- $B - \frac{R+r}{L} = 0 \rightarrow B = \frac{R+r}{L}$

- $\frac{A(R+r)}{L} = \frac{E}{L} \rightarrow A = \frac{E}{R+r}$

4-1- المنحنى الموافق لكل مقاومة :

لدينا $I_0 = \frac{E}{R+r}$ ، من هذه العبارة كلما كانت المقاومة R أكبر كانت شدة التيار العظمى أقل وعلى هذا الأساس يكون :

المنحنى (1) ⟵ $R = 38\,\Omega$

المنحنى (2) ⟵ $R = 18\,\Omega$

المنحنى (3) ⟵ $R = 8\,\Omega$

من أحد المنحنيات الثلاثة وليكن المنحنى (3) الذي يوافق $R = 8\,\Omega$ يكون $I_0 = 0{,}6\,A$ ومنه

$$r = \frac{6}{0{,}6} - 8 = 2\,\Omega$$

4-2- قيمة L :

$$\tau = \frac{L}{R+r} \rightarrow L = (R+r)\tau$$

من البيان : $\tau = 0{,}1\,A$ ومنه :

$$L = (8+2) \cdot 0{,}1 = 1\,H.$$

## التمرين (8) : ( التمرين : 031 في بنك التمارين على الموقع ) (**)

I- نحقق الدارة الكهربائية المبينة في (الشكل-1) و التي تتألف من مولد للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائية $E = 12\ V$ ، مكثفة سعتها $C = 120\ \mu F$ ، ناقل أومي مقاومته $R$ .

- نغلق القاطعة عند اللحظة $t = 0$ .

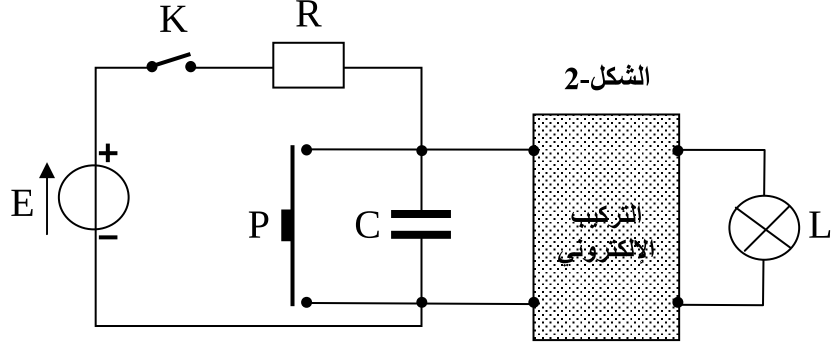
1- أوجد المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة .

2- تحقق من أن العبارة $u_C = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ هي حل للمعادلة التفاضلية .

الشكل-1

E + - R C A M B

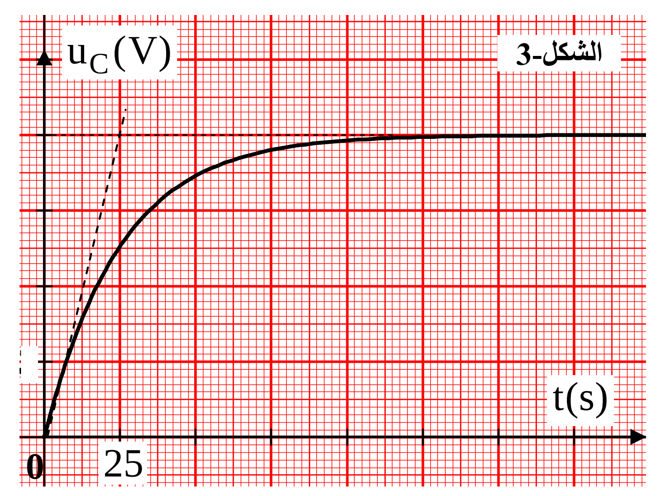
II- نصل مع ثنائي القطب RC السابق تركيب إلكتروني يتحكم في اشتعال مصباح ، فنحصل على (الشكل-2) الذي يمثل مخطط الدارة لميقاتية الإنارة (minuterie) .

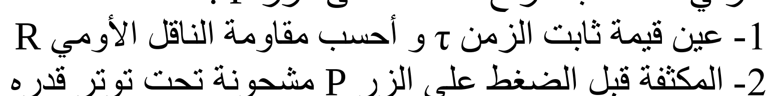



- يشتعل المصباح عندما يكون التوتر $u_C$ بين طرفي المكثفة أصغر من قيمة حدية $u_{C\ell} = 6\ V$ .

- ينطفئ المصباح عندما يكون التوتر $u_C$ بين طرفي المكثفة أكبر من قيمة حدية $u_{C\ell} = 6\ V$ أو يساويه .

- يتحكم في اشتعال المصباح بزر ضاغط P ، عندما نضغط عليه يدخل هذا الأخير في تلامس مع مربطي المكثفة و يسلك سلوك ناقل أومي مقاومته مهملة فتتفرغ المكثفة لحظيا (تصبح شحنتها معدومة بمجرد الضغط على الزر P) و عندما نرفع الضغط على الزر P في اللحظة $t = 0$ تصبح المكثفة موصولة مع المولد من جديد فتبدأ عملية شحن المكثفة إلى أن تشحن كليا ، منحنى (الشكل-3) يمثل تطور التوتر بين طرفي المكثفة بعد رفع الضغط على الزر P :



1- عين قيمة ثابت الزمن τ و أحسب مقاومة الناقل الأومي R

2- المكثفة قبل الضغط على الزر P مشحونة تحت توتر قدره $E = 12V$ ، المصباح يكون منطفئ أم مشتعل . لماذا ؟

3- نضغط على الزر الضاغط P ، هل يشتعل المصباح ؟ برر إجابتك .

4- نرفع الضغط عن الزر P :

أ- أحسب مدة اشتعال المصباح قيمة $t_\ell$ .

ب- نريد الزيادة في مدة اشتعال المصباح . ما هو الحل الذي تقترحه برأيك مع الشرح .

**الأجوبة :**

I - 1 - المعادلة التفاضلية بدلالة $u_C(t)$ :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = E$$

$$Ri + u_C = E \rightarrow R\frac{dq}{dt} + u_C = E \rightarrow R\frac{d(C.u_C)}{dt} + u_C = E$$

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E \rightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC}$$

2- التحقق من الحل :

- $u_C = E(1 - e^{-t/\tau})$
- $\frac{du_C}{dt} = E(0 - (-\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau})) = \frac{E}{\tau}e^{-t/\tau} \rightarrow \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{RC}e^{-t/\tau}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{E}{RC}e^{-t/\tau} + \frac{1}{RC}.E(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{RC}$$

$$\frac{E}{RC}e^{-t/\tau} + \frac{E}{RC} - \frac{E}{RC}e^{-t/\tau} = \frac{E}{RC} \rightarrow \frac{E}{RC} = \frac{E}{RC}$$

إذن الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية .

II - 1- قيمة $\tau$ بيانيا :

يمثل $\tau$ لحظة تقاطع مماس المنحنى $u_C(t)$ عند اللحظة $t = 0$ مع المستقيم المقارب $u_C = E$ و على هذا الأساس يكون : $\tau = 25\ s$ .

- قيمة R :

$$\tau = RC \rightarrow R = \frac{\tau}{C} \rightarrow R = \frac{25}{120\ .10^{-6}} = 2.08.\ 10^5\ \Omega$$

2- المصباح منطفئ لأن توتر المكثفة $u_C = 12\ V$ أكبر من التوتر الحدي $u_C = 6\ V$ ، علما أن المصباح يكون مشتعل عندما يكون التوتر $u_C$ بين طرفي المكثفة أقل من التوتر الحدي $(u_C < u_\ell)$ .

3- عندما نضغط على الزر P ينعدم التوتر بين طرفي المكثفة ، في هذه الحالة $u_C < u_\ell$ و عليه المصباح يشتعل .

4- أ- تطور حالة المصباح :

أ- حساب مدة اشتعال المصباح قيمة:

- مدة اشتعال المصباح $t_\ell$ هي لحظة بلوغ التوتر $u_C$ بين طرفي المكثفة قيمته الحدية $u_\ell$ أي :

$$t = t_\ell \rightarrow u_C = u_\ell$$

بالتعويض في العبارة $u_C = E(1 - e^{-t/\tau})$ نجد :

$$u_\ell = E(1 - e^{-t_\ell/\tau}) \rightarrow u_\ell = E - Ee^{-t_\ell/\tau} \rightarrow Ee^{-t_\ell/\tau} = E - u_\ell$$

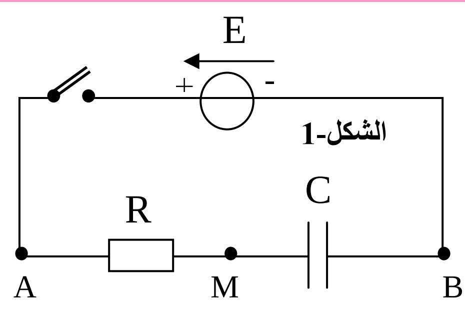
$$e^{-t_\ell/\tau} = \frac{E - u_\ell}{E} \rightarrow -\frac{t_\ell}{\tau} = \ln(\frac{E - u_\ell}{E}) \rightarrow t_\ell = -\tau.\ln(1 - \frac{u_\ell}{E})$$

$$t_\ell = -25.\ln(1 - \frac{6}{12}) = 17.32\ s$$

5- الحل المقترح لزيادة مدة اشتعال المصباح :

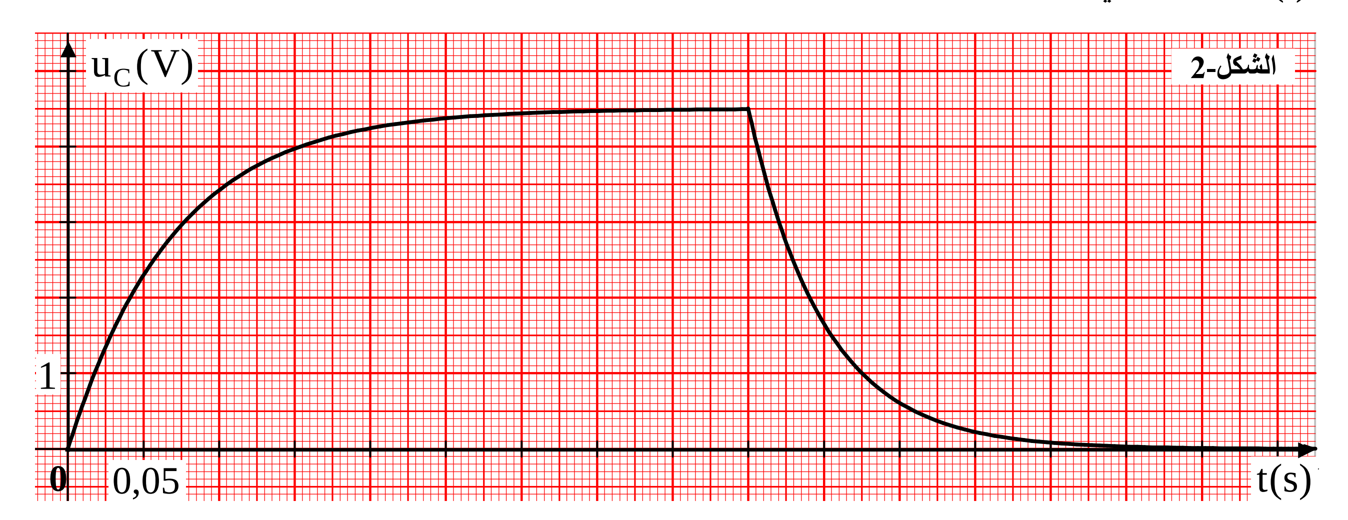
لزيادة اشتعال المصباح نزيد من قيمة $t_\ell$ و هذا يتحقق بزيادة قيمة ثابت الزمن $\tau$ (عبارة $t_\ell$ السابقة) و لزيادة قيمة $\tau = RC$ نزيد من قيمة سعة المكثفة C أو مقاومة الناقل الأومي R أو كلاهما .

## التمرين (9) : ( التمرين : 066 في بنك التمارين على الموقع ) (**)




الدارة الكهربائية المكونة من :
- عمود كهربائي قوته المحركة الكهربائية E و مقاومته الداخلية r .
- ناقل أومي مقاومته R .
- مكثفة غير مشحونة سعتها C = 10 mF .
- بادلة K .

عند اللحظة t = 0 نضع البادلة في الوضع (1) ثم في اللحظة t = 0,45 s نغيرها إلى الوضع (2) ، بواسطة ExAo تمكنا من الحصول على منحنى التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن .




I - دراسة عملية الشحن :

1- ما هو الجهاز الاخر الذي يسمح بالحصول على المنحنى السابق و بين بمخطط كيف يتم توصيله .

2- بين أن المعادلة التفاضلية التي تعبر عن التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة يعبر عنها بالعلاقة التالية :

$$\tau\frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

حيث τ ثابت يطلب كتابة عبارته بدلالة R ، r ، C (عبارة التوتر بين طرفي المولد : $u_e = E - ri$)

3- بالاعتماد على المعادلة التفاضلية و بالتحليل البعدي بين أن ثابت الزمن τ متجانس مع الزمن .

4 - تأكد أن حل المعادلة التفاضلية يعطى بالعبارة $u_C = E(1 - e^{-t/\tau})$ .

5- اعتمادا على بيان (الشكل-2) أثناء عملية الشحن عين :

أ- القوة المحركة الكهربائية للمحرك E .

ب- قيمة ثابت الزمن τ .

جـ- طاقة المكثفة في النظام الدائم .

II- دراسة عملية التفريغ :

1- أثبت أن قيمة المقاومة الداخلية للمولد تعطى بالعلاقة $r = \frac{\tau - \tau'}{C}$ .

2- عبارة التوتر بين طرفي المكثفة هي : $u_C = Ee^{-\frac{t-0,45}{\tau'}}$ ، اعتمادا على بيان (الشكل-2) .

أ- عين ثابت الزمن 'τ في حالة تفريغ المكثفة ثم استنتج قيمتي المقاومة R و المقاومةالداخلية r للمولد .

ب- أحسب الطاقة الكهربائية التي تحولها المكثفة المحولة في الناقل الأومي عند اللحظة t = 0,575 s . ماذا تستنتج .

**الأجوبة :**

I - 1- الجهاز الآخر الذي يسمح بالحصول على المنحنى السابق
هو راسم الاهتزاز المهبطي ويتم توصيله بالدارة كما يلي :

$Y_1$

2- المعادلة التفاضلية بدلالة $u_C(t)$ :
حسب قانون جمع التوترات :

$$U_R + U_C = U_e$$

$$Ri + U_C = E - ri$$

$$Ri + ri + U_C = E$$

$$(R+r)i + U_C = E$$

$$(R+r)\frac{dq}{dt} + U_C = E$$

$$(R+r)\frac{d(C.U_C)}{dt} + U_C = E$$

$$(R+r)C.\frac{dU_C}{dt} + U_C = E$$

بالمطابقة مع المعادلة التفاضلية المعطاة نجد :

$$\tau = (R+r)C$$

3- اثبات أن $\tau$ متجانس مع الزمن بالاعتماد على المعادلة التفاضلية

$$\tau\frac{dU_C}{dt} + U_C = E$$

$$[\tau].\frac{[U]}{[T]} + [U] = [E]$$

$$[\tau]\frac{[U]}{[T]} = [U] - [U]$$

$$[\tau]\frac{[U]}{[T]} = [U] \rightarrow [\tau] = [T] = s$$

إذن $\tau$ متجانس مع الزمن .

4 - التحقق من الحل :

• $u_C = E(1 - e^{-t/\tau})$

• $\frac{du_C}{dt} = E\left(0 - \left(-\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\right)\right) = \frac{E}{\tau}e^{-t/\tau}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة :

$$\tau\frac{E}{\tau}e^{-t/\tau} + E(1 - e^{-t/\tau}) = E$$

$$Ee^{-t/\tau} + E - Ee^{-t/\tau} = E \rightarrow E = E$$

إذن الحل المعطى هو فعلا حل للمعادلة التفاضلية .

5 - أ - قيمة $E$ :

من البيان في الجزء الخاص بالشحن ، عند النظام الدائم لدينا : $u_{C(\infty)} = 4{,}5V$

ومن العبارة $u_C(t)$ :

$$u_{C(\infty)} = E(1 - e^{-\frac{\infty}{\tau}}) = E \rightarrow E = 4{,}5V$$

ب - قيمة $\tau$ :

من البيان في الجزء الخاص بالشحن :

$$t = \tau \rightarrow u_C = 0{,}63\, u_{Cmax} = 0{,}63 \times 4{,}5 =$$

بالإسقاط :

$$\tau = 1{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}07\,s$$

ب - طاقة المكثفة الأعظمية :

$$E_{(C)max} = \frac{1}{2}CE^2$$

$$E_{(C)max} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-3}(4{,}5)^2 = 0{,}10\,J$$

II - 1 - إثبات $r = \frac{\tau - \tau'}{C}$ :

لدينا عند الشحن :

$$\tau = (R + r)C$$

وعند التفريغ :

$$\tau' = RC$$

بطرح عبارة $\tau'$ من $\tau$ :

$$\tau - \tau' = (R + r)C - RC$$

$$\tau - \tau' = RC + rC - RC$$

$$\tau - \tau' = rC \rightarrow r = \frac{\tau - \tau'}{C}$$

ج - 2- ثابت الزمن $\tau'$ :

$t = \tau' + 0{,}45 \rightarrow U_C = 0{,}37E = 0{,}37 \times 4{,}5 = 1{,}67\,V$

بالاسقاط :

$\tau' = 0{,}05\,s$

- قيمة R :

$\tau' = RC \rightarrow R = \frac{\tau'}{C} = \frac{0{,}05}{10 \cdot 10^{-3}} = 5\,\Omega$

- قيمة r :

$r = \frac{\tau - \tau'}{C} = \frac{0{,}07 - 0{,}05}{10 \times 10^{-3}} = 2\,\Omega$

د- عبارة الطاقة المحولة بفعل جول :

$E'_{(C)} = E_{(C)max} - E_{(C)(t)}$

$E'_{(C)} = E_{(C)max} - \frac{1}{2} C U_C^2$

لدينا : $U_C = E e^{-\frac{t-0{,}45}{\tau'}}$ ومنه :

$E'_{(C)} = E_{(C)max} - \frac{1}{2} C E^2 e^{-\frac{2(t-0{,}45)}{\tau'}}$

$E'_{(C)} = E_{(C)max} - E_{(C)max}\, e^{-\frac{2(t-0{,}45)}{\tau'}}$

$E'_{(C)} = E_{(C)}\left(1 - e^{-\frac{2(t-0{,}45)}{\tau'}}\right)$

- الطاقة المحولة في الناقل الأومي عند اللحظة $t = 0{,}575\,s$ :

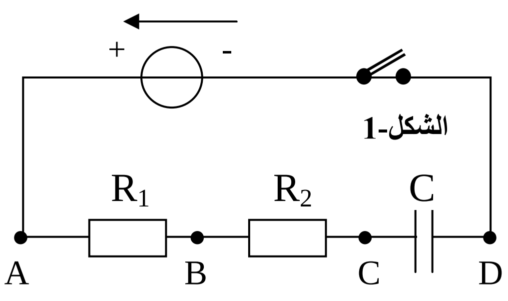
$E'_{(C)}(t=0{,}575\,s) = 0{,}1\left(1 - e^{-\frac{2(0{,}575-0{,}45)}{0{,}05}}\right) = 0{,}1\,J$

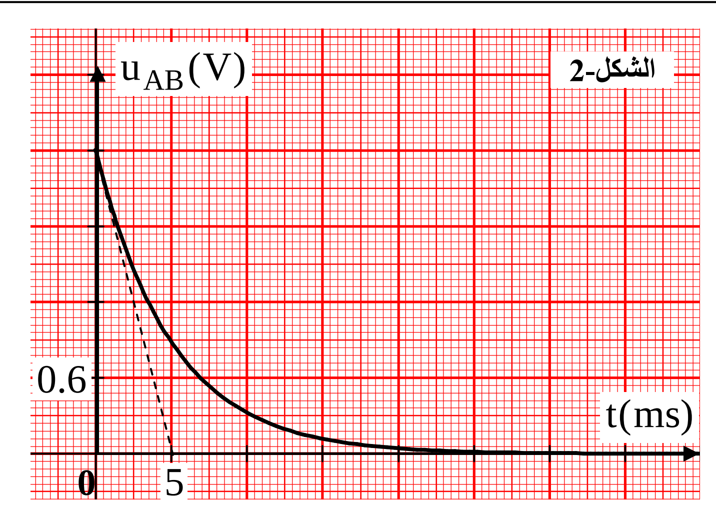
نلاحظ أن الطاقة المحولة من المكثفة عند اللحظة $t = 0{,}575\,s$ مساوية لقيمة الطاقة التي خزنتها عند نهاية عملية الشحن (الشحن) معنى هذا أنها حولت كل الطاقة التي خزنتها في نهاية الشحن إلى الناقل الأومي بفعل جول.

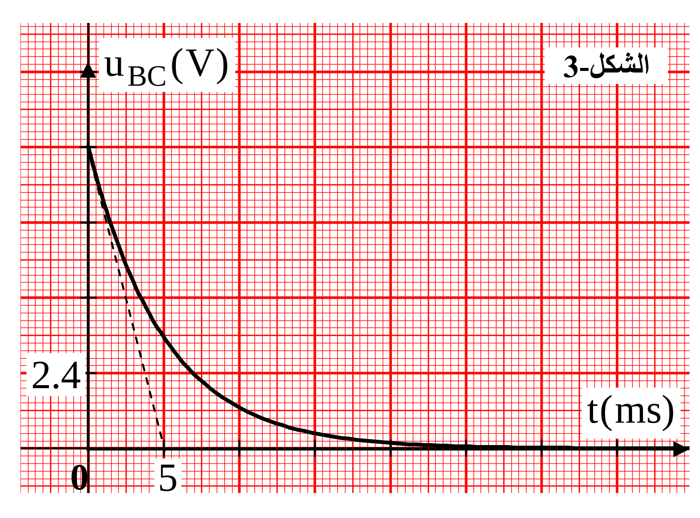
## التمرين (10) : ( التمرين : 067 في بنك التمارين على الموقع ) (**)

بواسطة مولد توتر ثابت قوته المحركة الكهربائية E ، ناقلين أوميين مقاومة الأول $R_1 = 5\,\Omega$ و مقاومة الثاني $R_2$ مجهولة ، مكثفة فارغة سعتها C ، قاطعة K نحقق الدارة المبينة في (الشكل-1) التالي ثم نغلق القاطعة عند اللحظة $t = 0$ .

الدراسة التجريبية لتطور التوتر $u_{AB}$ بين طرفي الناقل الأومي $R_1$ التوتر $u_{BC}$ بين طرفي الناقل الأومي $R_2$ بالاعتماد على راسم الاهتزاز المهبطي أعطت بياني الشكلين (2) و (3) على الترتيب :






1- بين على الدارة السابقة كيفية وصل راسم الاهتزاز المهبطي بالدارة حتى نحصل على البيانين السابقين .

2- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة $u_{CD}$ حيث $u_{CD} = f(t)$ التوتر بين طرفي المكثفة مبينا حلها دون برهان .

3- أكتب بدلالة $E$ ، $R_1$ ، $R_2$ ، $C$ العبارات اللحظية لكل من :

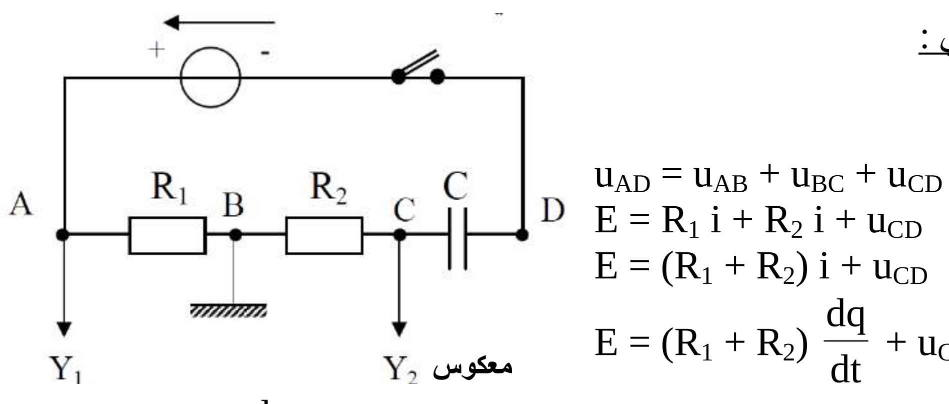
- شدة التيار المار في الدارة $i(t)$ .
- التوتر $u_{AB}$ بين طرفي الناقل الأومي $R_1$ .
- التوتر $u_{BC}$ بين طرفي الناقل الأومي $R_2$ .

4- يقطع مماس المنحنى $u_{AB}(t)$ عند اللحظة $t = 0$ محور الأزمنة في اللحظة $t = \tau$ حيث $\tau$ هو ثابت الزمن ، أثبت أن : $\tau = (R_1 + R_2)C$ .

5- اعتمادا على الدراسة التجريبية و النظرية السابقتين أوجد : $E$ ، $I_0$ ، $R_2$ ، $C$ . حيث $I_0$ شدة التيار الأعظمية المارة بالدارة .

**الأجوبة :**

1- كيفية وصل راسم الاهتزاز المهبطي :




2- المعادلة التفاضلية بدلالة $u_{CD}$ :

بتطبيق قانون جمع التوترات :

$$u_{AD} = u_{AB} + u_{BC} + u_{CD}$$
$$E = R_1\, i + R_2\, i + u_{CD}$$
$$E = (R_1 + R_2)\, i + u_{CD}$$
$$E = (R_1 + R_2)\frac{dq}{dt} + u_{CD}$$
$$E = (R_1 + R_2)C\frac{du_{CD}}{dt} + u_{CD}$$
$$\frac{du_{CD}}{dt} + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}u_{CD} = \frac{E}{(R_1 + R_2)C}$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى حلها : $u_{CD} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{(R_1 + R_2)C}}\right)$ .

3- العبارات اللحظية :

• شدة التيار :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C.u_{CD})}{dt} \rightarrow i = C\frac{du_{CD}}{dt}$$

لدينا :

• $u_{CD} = E\,(1 - e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}})$

• $\frac{du_{CD}}{dt} = E\,(0 - (-\frac{1}{(R_1+R_2)C}e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}})) \rightarrow \frac{du_{CD}}{dt} = \frac{E}{(R_1+R_2)C}e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}$

و منه يصبح :

$$i = C.\frac{E}{(R_1+R_2)C}e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}} \rightarrow i = \frac{E}{(R_1+R_2)}e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}$$

• التوتر $u_{AB}$ بين طرفي الناقل الأومي $R_1$ :

$$u_{AB} = R_1\,i$$

وجدنا سابقا $i = \frac{E}{(R_1+R_2)}e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}$ بالتعويض نجد :

$$u_{AB} = \frac{E\,R_1}{(R_1+R_2)}e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}$$

• التوتر $u_{BC}$ بين طرفي الناقل الأومي $R_2$ :

$$u_{BC} = R_2\,i \rightarrow u_{BC} = \frac{E\,R_2}{(R_1+R_2)}e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}$$

4- إثبات أن $\tau = (R_1 + R_2)C$ :

نكتب معادلة المماس .

$$u_{AB} = a\,t + b$$

▪ $a = (\frac{du_{AB}}{dt})_{t=0}$

لدينا $u_{AB} = \frac{E\,R_1}{R_1+R_2}e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}$ و منه :

$$\frac{du_{AB}}{dt} = \frac{E\,R_1}{(R_1+R_2)}(-\frac{1}{(R_1+R_2)C}e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}) = -\frac{E\,R_1}{(R_1+R_2)^2C}e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}$$

و عند اللحظة $t = 0$ يكون :

$$(\frac{du_{AB}}{dt})_{t=0} = -\frac{E\,R_1}{(R_1+R_2)^2C} \rightarrow a = -\frac{E\,R_1}{(R_1+R_2)^2C}$$

و منه تصبح معادلة المماس كما يلي :

$$u_{AB} = -\frac{E\,R_1}{(R_1+R_2)^2 C}\,t + b$$

▪ $b = u_{AB(t=0)} \rightarrow b = \left(\frac{E\,R_1}{R_1+R_2}\,e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}\right)_{t=0} \rightarrow b = \frac{E\,R_1}{R_1+R_2}\,e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}$

إذن معادلة مماس المنحنى $u_{AB} = f(t)$ عند اللحظة $t = 0$ تكون كما يلي :

$$u_{AB} = -\frac{E\,R_1}{(R_1+R_2)^2 C}\,t + \frac{E\,R_1}{(R_1+R_2)}$$

عند تقاطع المماس في اللحظة محور الأزمنة يكون $u_{AB} = 0$ بالتعويض في معادلة المماس الأخيرة يكون :

$$0 = -\frac{E\,R_1}{(R_1+R_2)^2 C}\,t + \frac{E\,R_1}{(R_1+R_2)}$$

$$\frac{E\,R_1}{(R_1+R_2)^2 C}\,t = \frac{E\,R_1}{(R_1+R_2)} \rightarrow \frac{1}{(R_1+R_2)\,C}\,t = 1 \rightarrow t = (R_1 + R_2)\,C = \tau$$

و هي لحظة تقاطع مماس المنحنى $u_{AB}$ (t) عند اللحظة $t = 0$ مع محور الأزمنة .

5- قيمة E :

حسب قانون جمع التوترات :

$E = u_{AB} + u_{BC} + u_{CD}$ ............................ (1)

من المنحنيين $u_{AB}(t)$ ، $u_{BC}(t)$ يكون :

$t = 0 \rightarrow u_{AB0} = 2.4\ V \quad , \quad u_{BC0} = 9.6\ V$

و كون أن المكثفة تكون غير مشحونة عند اللحظة $t = 0$ يكون $u_{CD} = 0$ .

بالتعويض في العبارة (1) :

$E = 2.4 + 9.6 + 0 = 12\ V$

• قيمة $I_0$ :

$u_{AB} = R_1\,i$

عند اللحظة $t = 0$ تكون شدة التيار أعظمية لذا يمكن كتابة :

$$u_{AB} = R_1\,I_0 \rightarrow I_0 = \frac{u_{AB0}}{R_1}$$

من المنحنى $u_{AB}(t)$ : $u_{AB0} = 4\ .\ 0.6 = 2.4\ V$ و منه :

$$I_0 = \frac{2.4}{5} = 0.48\ A$$

• قيمة $R_2$ :

طريقة (1) :

$u_{BC} = R_2\,i$

عند اللحظة $t = 0$ تكون شدة التيار أعظمية لذا يمكن كتابة :

$$u_{BC0} = R_2\,I_0 \rightarrow R_2 = \frac{u_{BC0}}{I_0}$$

من المنحنى $u_{BC}(t)$ : $u_{AB0} = 4 \;.\; 2.4 = 9.6\ V$ و منه :

$$R_2 = \frac{9.6}{0.48} = 20\,\Omega$$

<u>طريقة (2) :</u>

$$I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2} \rightarrow (R_1 + R_2) = \frac{E}{I_0} \rightarrow R_2 = \frac{E}{I_0} - R_1$$

$$R_2 = \frac{12}{0.48} - 5 = 20\,\Omega$$

<u>• قيمة C :</u>

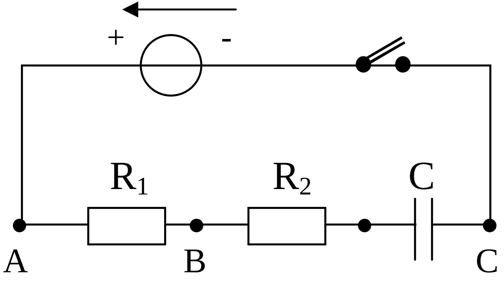
$$\tau = (R_1 + R_2)\,C \rightarrow \; C = \frac{\tau}{(R_1 + R_2)}$$

من البيانين $\tau = 5 \;.\; 10^{-3}\ s$ ، و منه :

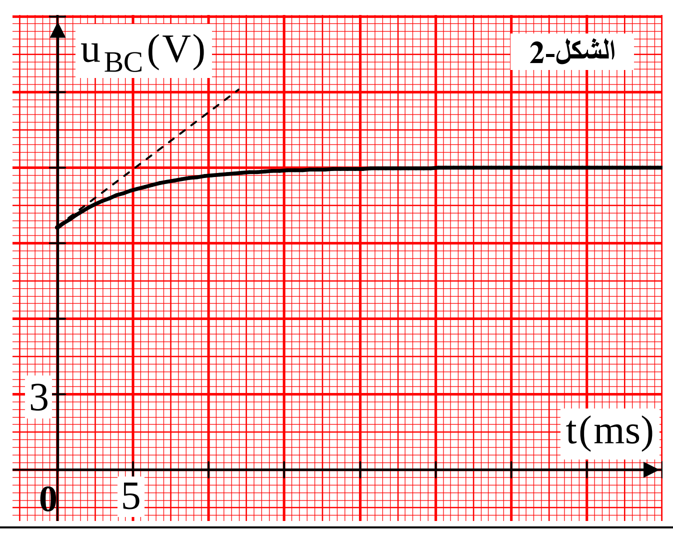
$$C = \frac{5\,.10^{-3}}{(5+20)} = 2\,.10^{-4}\ F$$

## <u>التمرين (11) :</u> <u>( التمرين : 069 في بنك التمارين على الموقع ) (***)</u>

بواسطة مولد توتر ثابت قوته المحركة الكهربائية E ، ناقلين أوميين مقاومة الأول $R_1$ (مجهولة) و مقاومة الثاني $R_2 = 20\ \Omega$ ، مكثفة فارغة سعتها C ، قاطعة K ، نحقق الدارة المبينة في الشكل التالي ثم نغلق القاطعة عند اللحظة $t = 0$ .




المنحنى البياني التالي يمثل تطور التوتر $u_{BC}$ بين طرفي الناقل الأومي ذو المقاومة $R_2$ و المكثفة معا .



1- بين على الدارة السابقة كيفية وصل راسم الاهتزاز المهبطي بالدارة حتى نحصل على المنحنى البياني $u_{BC}(t)$ .

2- أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة $q = f(t)$ حيث q شحنة المكثفة .

3- حل هذه المعادلة التفاضلية من الشكل $q = A(1 - e^{-t/B})$ ، عين A و B ، ماذا يمثل B و ما هو مدلوله الفيزيائي .

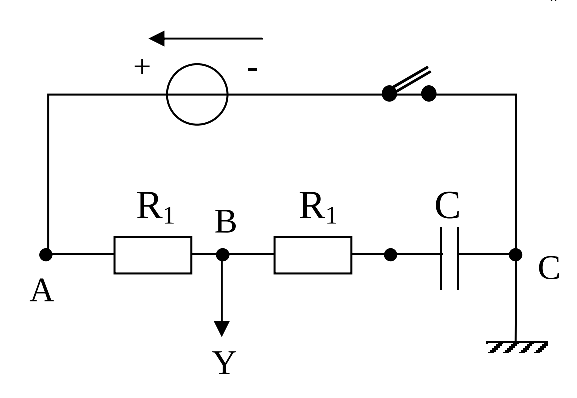
4- أوجد بدلالة E ، $R_1$ ، $R_2$ ، C العبارات اللحظية لكل من :

- شدة التيار المار في الدارة .
- التوتر $u_{BC}$ بين طرفي الناقل الأومي $R_2$ و المكثفة معا .

5- اعتمادا على العبارات الزمنية $i(t)$ ، $u_{BC}(t)$ و المنحنى $u_{BC}(t)$ أوجد : E ، $R_1$ ، $I_0$ ، C علما مماس المنحنى $u_{BC} = f(t)$ عند اللحظة $t = 0$ يقطع المستقيم المقارب للمنحنى ($t = \infty$) عند اللحظة $t = \tau = (R_1 + R_2)C$ حيث τ هو ثابت الزمن .

**الأجوبة :**

1- كيفية و صل راسم الاهتزاز المهبطي بالدارة :




2- المعادلة التفاضلية بدلالة q :

حسب قانون جمع التوترات :

$u_{AB} + u_{BC} = E$

$$R_1\, i + R_2\, i + \frac{q}{C} = E \quad \rightarrow (R_1 + R_2)\, i + \frac{q}{C} = E \quad \rightarrow (R_1 + R_2)\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}\, q = \frac{E}{(R_1 + R_2)}$$

3- عبارة A و B :

- $q = A\,(1 - e^{-t/B})$
- $\frac{dq}{dt} = A\,(0 - (-\frac{1}{B}e^{-t/B})) \rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{A}{B}e^{-t/B}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{A}{B}e^{-t/B} + \frac{A}{(R_1 + R_2)C}(1 - e^{-t/B}) = \frac{E}{(R_1 + R_2)}$$

$$\frac{A}{B}e^{-t/B} + \frac{A}{(R_1 + R_2)C} - \frac{A}{(R_1 + R_2)C}e^{-t/B} = \frac{E}{(R_1 + R_2)}$$

$$Ae^{-t/B}\left(\frac{1}{B}-\frac{A}{(R_1+R_2)C}\right)+\frac{A}{(R_1+R_2)C}=\frac{E}{(R_1+R_2)}$$

الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية و لتحقق المساواة يجب أن يكون :

- $\frac{A}{(R_1+R_2)C}=\frac{E}{(R_1+R_2)} \rightarrow A = EC$
- $\frac{1}{B}-\frac{1}{(R_1+R_2)C}=0 \rightarrow B=(R_1+R_2)C=\tau$

- يمثل B ثابت الزمن $\tau$ و المدلول الفيزيائي لهذا الثابت هو أنه يمثل الزمن اللازم لشحن المكثفة بنسبة 63% .

4- العبارات اللحظية :

• عبارة شدة التيار $i(t)$ :

مما سبق $q = A\,(1-e^{-t/B})$ و حيث أننا وجدنا $A = EC$ ، $B = (R_1 + R_2)C$ يمكن كتابة :

$$q = EC\,(1-e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)}})$$

لدينا :

$$i=\frac{dq}{dt} \rightarrow i = EC\,(0-(-\frac{1}{(R_1+R_2)C}\,e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}})$$

$$i=\frac{EC}{(R_1+R_2)C}\,e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}) \rightarrow i=\frac{E}{(R_1+R_2)}\,e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}})$$

• عبارة التوتر $u_{BC}(t)$ بين طرفي الناقل الأومي $R_2$ و المكثفة :

حسب قانون جمع التوترات :

$u_{AC} = u_{AB} + u_{BC}$

$E = u_{AB} + u_{BC}$

$u_{BC} = E - R_1.i$

مما سبق وجدنا $i=\frac{E}{(R_1+R_2)}\,e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}})$ و منه يصبح :

$$u_{BC}=E-(R.\frac{E}{(R_1+R_2)}\,e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}})) \rightarrow u_{BC}=E-\frac{E\,R_1}{(R_1+R_2)}\,e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}})$$

5- قيمة E :

من العبارة $u_{BC}=E-\frac{E\,R_1}{(R_1+R_2)}\,e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}$ :

$t=\infty \rightarrow u_{BC}=E$

و من البيان $u_{BC}(t)$ يكون :

$t=\infty \rightarrow u_{BC}=(4\,.\,3)=12\ V$

إذن : $E = 12\ V$ .

• قيمة $R_1$ :

- من البيان $u_{BC}(t)$ يكون :

$$t = 0 \rightarrow (u_{BC})_{t=0} = 3.2 \, . \, 3 = 9.6 \text{ V}$$

- من العبارة ( $u_{BC} = E - \dfrac{E R_1}{(R_1 + R_2)} e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}$ :

$$t = 0 \rightarrow (u_{BC})_{t=0} = \frac{ER_2}{R_1 + R_2}$$ ( اعتمادا على ما سبق )

$$R_1 + R_2 = \frac{ER_2}{(u_{BC})_{t=0}} \rightarrow R_1 = \frac{ER_2}{(u_{BC})_{t=0}} - R_2$$

$$R_1 = \frac{12 \, . \, 20}{9.6} - 20 = 5 \, \Omega$$

قيمة $I_0$ :

- عند اللحظة $t = 0$ تكون شدة التيار أعظمية $i = I_0$ .

- من العبارة اللحظية لشدة التيار :

$$t = 0 \rightarrow i = \frac{E}{(R_1 + R_2)} \rightarrow I_0 = \frac{E}{(R_1 + R_2)}$$

$$I_0 = \frac{12}{5 + 20} = 0.48 \text{ A}$$

• قيمة C :

$$\tau = (R_1 + R_2)C \rightarrow C = \frac{\tau}{(R_1 + R_2)}$$

من البيان $u_{BC}(t)$ لدينا $\tau = 5 \, . \, 10^{-3}$ s و منه :

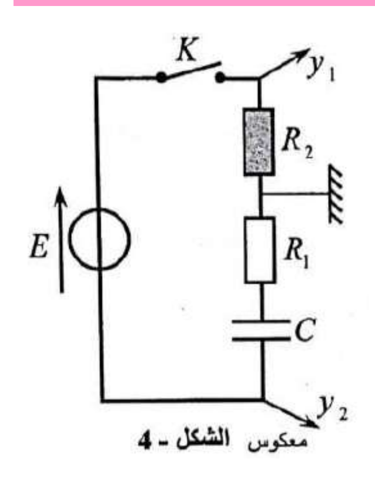
$$C = \frac{5.10^{-3}}{(5 + 20)} = 2.10^{-4} \text{ F} = 200 \, \mu\text{F}$$

**التمرين (12) :** (بكالوريا 2016 - علوم تجريبية ) ( التمرين : 033 في بنك التمارين على الموقع ) (***)

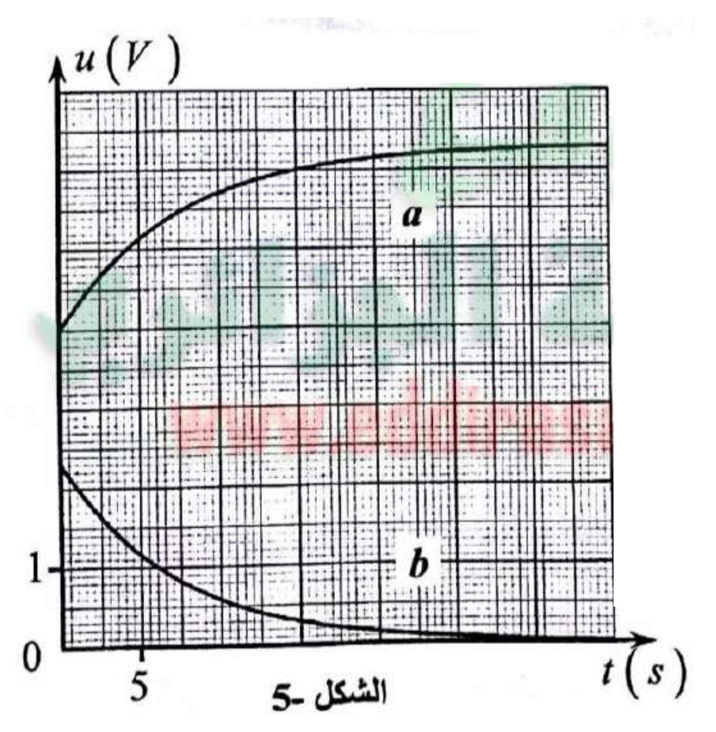
نركب الدارة الكهربائية الموضحة بالشكل-4 و المؤلفة من :

- مولد كهربائي للتوتر الثابت E .
- مكثفة غير مشحونة سعتها C .
- ناقلين أوميين $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ و $R_2$ غير معلومة .
- قاطعة K .

نوصل الدارة الكهربائية براسم اهتزاز مهبطي ذي ذاكرة كما موضح على الشكل-4 ثم نغلق القاطعة K في اللحظة $t = 0$ ، فنشاهد على الشاشة المنحنيين البيانيين (a) و (b) (الشكل-5) .



الشكل - 4



الشكل -5

1- ارفق كل منحنى بالمدخل الموافق له مع التبرير .
2- اكتب المعادلة التفاضلية التي تحققها الشدة $i(t)$ للتيار الكهربائي في الدارة .
3- أوجد عبارة الشدة $I_0$ للتيار الأعظمي المار في الدارة .
4- استنتج عند اللحظة $t = 0$ عبارة التوتر بين طرفي الناقل الأومي $R_2$ بدلالة $E$ ، $R_1$ و $R_2$ .
5- اعتمادا على البيانين ، استنتج قيمة كل من $E$ ، $I_0$ ، $R_2$ و $C$ .

**الأجوبة :**

1- المنحنى الموافق لكل مدخل :
- في المدخل $Y_1$ يظهر التوتر $u_1 = u_{R2}$ بين طرفي الناقل الأومي $R_2$ .
- في المدخل $Y_2$ يظهر التوتر $|u_2| = u_{R1} + u_C$ بين طرفي الناقل الأومي $R_1$ و المكثفة معا .
- من خصائص ثنائي القطب RC .

$$t = \infty \rightarrow i = 0 \begin{cases} \rightarrow u_{R1} = R_1 i = 0 \\ \rightarrow u_{R2} = R_2\, i = 0 \\ \rightarrow u_C = E \end{cases}$$

و عليه :

$$t = 0 \rightarrow u_1 = u_{R2} = 0$$
$$t = 0 \rightarrow u_2 = u_{R1} + u_C = E \neq 0$$

إذن : المنحنى $b \leftarrow Y_1$
المنحنى $a \leftarrow Y_2$

2- المعادلة التفاضلية التي تحققها $i(t)$ :
حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{R2} + u_{R1} + u_C = E$$

$$R_2.i + R_1.i + \frac{q}{C} = E \rightarrow (R_1 + R_2)i + \frac{q}{C} = E$$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن :

$$(R_1 + R_2)\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = 0$$

و حيث أن $\frac{dq}{dt} = i$ يصبح :

$$(R_1 + R_2)\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0 \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}i = 0$$

3- عبارة $I_0$ :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{R2} + u_{R1} + u_C = E \rightarrow R_2 i + R_1 i + u_C = E$$

عند اللحظة $t = 0$ يكون $i = I_0$ ، $u_C = 0$ و منه :

$$R_2 I_0 + R_1 I_0 + 0 = E \rightarrow (R_1 + R_2)I_0 = E \rightarrow I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

4- عبارة $u_{R2}$ عند $t = 0$ بدلالة $E$ ، $R_1$ ، $R_2$ :

$$u_{R2} = R_2.i$$

عند اللحظة $t = 0$ يكون $i = I_0$ و منه :

$$u_{R2(t=0)} = R_2.I_0$$

و حيث أن $I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2}$ يصبح :

$$u_{R2(t=0)} = \frac{E.R_2}{R_1 + R_2}$$

5- قيمة $E$ :

حسب قانون جمع التوترات :

$$E = u_1 + |u_2|$$

اعتمادا على المنحنى (a) الموافق للتوتر $u_b$ و المنحنى (b) الموافق للتوتر $u_1$ :

- $t = 0 \rightarrow \begin{cases} u_1 = 2.3\ V \\ u_2 = 4\ v \end{cases} \rightarrow E = 2.3 + 4 = 6.3\ V$

أو :

- $t = \infty \rightarrow \begin{cases} u_1 = 0\ V \\ u_2 = 6.3\ v \end{cases} \rightarrow E = 0 + 6.3 = 6.3\ V$

- قيمة $I_0$ :

$$u_2 = u_{R1} + u_C$$
$$u_2 = R_1.i + u_C$$

عند اللحظة $t = 0$ يكون $i = I_0$ ، $u_C = 0$ و منه :

$$u_{2(t=0)} = R_1.I_0 \rightarrow I_0 = \frac{u_{R2(t=0)}}{R_1}$$

من المنحنى (a) الموافق لـ $u_2$ لدينا : $u_{2(t=0)} = 4\ V$ و منه :

$$I_0 = \frac{4}{10^3} \rightarrow I_0 = 4 \,.\, 10^{-3}\ A$$

قيمة $R_2$ :

طريقة (1) :

$$u_{R2} = R_2.i$$

عند اللحظة $t = 0$ أين $i = I_0$ يكون :

$$u_{R2(t=0)} = R_2.I_0 \rightarrow R_2 = \frac{u_{R2(t=0)}}{I_0}$$

من المنحنى (b) الموافق لـ $u_1$ لدينا : $u_{R2(t=0)} = 2.3\ V$ و منه :

$$R_2 = \frac{2.3}{4 \,.\, 10^{-3}} = 575\,\Omega$$

طريقة (2) :

$$I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2} \rightarrow R_1 + R_2 = \frac{E}{I_0} \rightarrow R_2 = \frac{E}{I_0} - R_1$$

$$R_2 = \frac{6.3}{4 \,.\, 10^{-3}} - 10^3 = 575\,\Omega$$

قيمة C :

نحسب أولا قيمة $\tau$ :

من المنحنى (b) الموافق لـ $u_1$ :

$$t = \tau \rightarrow u_1 = 0,37\ u_{10} = 0.37 \,.\, 2,3 = 0.851\ V$$

بالإسقاط مع أخذ سلم الرسم بعين الاعتبار :

$$\tau = 1,5 \,.\, 5 = 7.5\ s$$

و لدينا :

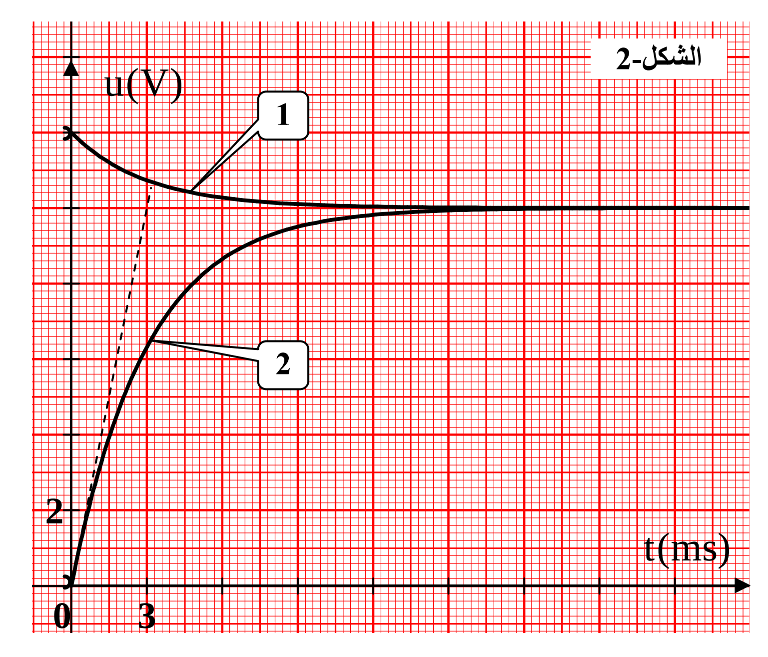
$$\tau = (R_1 + R_2)\,C \rightarrow C = \frac{\tau}{R_1 + R_2} \rightarrow C = \frac{7,5}{10^3 + 575} \approx 4,76 \,.\, 10^{-3}\ F$$

## التمرين (13) : ( التمرين : 034 في بنك التمارين على الموقع ) (***)

الدارة الكهربائية الممثلة في (الشكل-1) تتكون من :

- مولد كهربائي للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائية E .
- وشيعة تحريضية ذاتيتها L و مقاومتها مهملة .
- قاطعة K .
- ناقلين أوميين مقاومتهما $R_1$ مجهولة و $R_2 = 40\ \Omega$ .
- راسم اهتزاز ذو ذاكرة .

نوصل الدارة براسم الاهتزاز كما مبين في (الشكل-1) ثم نغلق القاطعة في اللحظة $t = 0$ فنشاهد على الشاشة المنحنيين (1) و (2) كما في (الشكل-2) .




1- إعتمادا على (الشكل-2) ، عين المنحنى الذي يمثل $u_{PN}(t)$ و المنحنى الذي يمثل $u_{R2}(t)$ مع التعليل .

2- اعتمادا على المنحنيين (1) ، (2) أوجد :

أ- القوة المحركة الكهربائية E للمولد .

ب- شدة التيار الأعظمي $I_0$ المار بالدارة .

3- أوجد المعادلة التفاضلية التي تعطي شدة التيار i(t) .

4- حل المعادلة التفاضلية السابقة هو $i = I_0\,(1 - e^{-t/\tau})$ أوجد عبارتي الثابتين $I_0$ و τ بدلالة الثوابت المميزة و ما هو مدلولهما الفيزيائي ؟

5- أوجد قيمة المقاومة $R_1$ و ذاتية الوشيعة L .

**الأجوبة :**

1- المنحنى الموافق لكل توتر :

▪ التوتر $u_{PN}$ :

حسب قانون جمع التوترات :

$E = u_{MB} + U_{PN}$

$u_{PN} = E + u_{MB} \rightarrow u_{PN} = E + u_{R1}$

من خصائص ثنائي القطب RL عند غلق القاطعة :

$t = 0 \rightarrow i = 0 \rightarrow u_{PN} = E \neq 0$

و هذا يتفق مع المنحنى $C_1$ .

التوتر $u_{R2}$ :

$u_{R2} = R_2.i$

من خصائص ثنائي القطب RL عند غلق القاطعة :

$t = 0 \rightarrow i = 0 \rightarrow u_{R2} = 0$

و هذا يتفق مع المنحنى $C_2$ .

2-أ- قيمة E :

حسب قانون

$E = u_{R1} + u_{PN}$

$u_{PN} = E + u_{R1} \rightarrow u_{PN} = E - R.i_{(t)}$

من خصائص ثنائي القطب RL عند غلق القاطعة :

$t = 0 \rightarrow i = 0 \rightarrow u_{PN(t=0)} = E$

من المنحنى $(C_1)$ الموافق لـ $u_{PN}(t)$ :

$t = 0 \rightarrow u_{PN} = 6 . 2 = 12\ V \rightarrow E = 12\ V$

ب- قيمة $I_0$ :

$u_{R2} = R_2.i$

في النظام الدائم نكتب :

$$u_{R2(\infty)} = R_2.I_0 \rightarrow I_0 = \frac{u_{R2(\infty)}}{R_2}$$

من المنحنى $(C_2)$ الموافق لـ $u_{R2}(t)$ :

$$u_{R2(\infty)} = 5 \;.\; 2 = 10\ V$$

إذن :

$$I_0 = \frac{10}{40} = 0.25\ A$$

**3- المعادلة التفاضلية بدلالة $i(t)$ :**

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{R1} + u_b + u_{R2} = E$$

$$R_1 i + L\frac{di}{dt} + R_2 i = E$$

$$L\frac{di}{dt} + (R_1 + R_2)\,i = E \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{(R_1 + R_2)}{L}\,i = \frac{E}{L}$$

**4- عبارتي $I_0$ ، $\tau$ :**

- $i = I_0\,(1 - e^{-t/\tau})$
- $\frac{di}{dt} = \frac{I_0}{\tau}\,e^{-t/\tau}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{I_0}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{R_1 + R_2}{L}I_0\,(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{L}$$

$$\frac{I_0}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{R_1 + R_2}{L}I_0 - \frac{R_1 + R_2}{L}I_0\,e^{-t/\tau} = \frac{E}{L}$$

$$I_0\,e^{-t/\tau}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{R_1 + R_2}{L}\right) + \frac{(R_1 + R_2)I_0}{L} = \frac{E}{L}$$

لكي تتحقق المساواة :

- $\frac{1}{\tau} - \frac{R_1 + R_2}{L} = 0 \rightarrow \frac{1}{\tau} = \frac{R_1 + R_2}{L} \rightarrow \tau = \frac{L}{R_1 + R_2}$
- $\frac{(R_1 + R_2)I_0}{L} = \frac{E}{L} \rightarrow I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2}$

**5- قيمة $R_1$ :**

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_{R1} + u_{PN} = E$$

$$u_{PN} = E - u_{R1} \rightarrow u_{PN} = E - R_1 i$$

في النظام الدائم $(t = \infty)$ أين يكون $i = I_0$ نكتب :

$$u_{PN(\infty)} = E - R_1 I_0$$

$$R_1 I_0 = E - u_{PN(\infty)} \rightarrow R_1 = \frac{E - u_{PN(\infty)}}{I_0} \rightarrow R_1 = \frac{12 - 10}{0,25} = 8\,\Omega$$

<u>قيمة L :</u>

من المنحنى (2) : $\tau = 3\text{ ms}$ .

و لدينا سابقا :

$$\tau = \frac{L}{R_1 + R_2} \rightarrow L = \tau\,(R_1 + R_2) \rightarrow L = 3\,.\,10^{-3}\,(8 + 40) = 1,44\text{ H}$$

** الأستاذ : فرقاني فارس **
ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم
الخروب - قسنطينة
Fares_Fergani@yahoo.Fr

**نرجو إبلاغنا عن طريق البريد الإلكتروني بأي خلل في الدروس أو التمارين و حلولها .**
**وشكرا مسبقا**

لتحميل نسخة من هذا الملف و للمزيد . أدخل موقع الأستاذ :

**www.sites.google.com/site/faresfergani**